# MATEMÁTICAS
# 1º BTO. SOCIAL

$f(x)$

**ACADEMIA TAMARGO, S.L.U.**

# SÍGUENOS EN:

facebook

Linked in

twitter



## ACADEMIA TAMARGO, S.L.U.

# CONTENIDO

# INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS

## INTERVALOS

$\Rightarrow$ ABIERTO $(A, B)$

$\Rightarrow$ CERRADO $[A, B]$

## SEMIRRECTAS

$\Rightarrow$ ABIERTA $(A, +\infty)$

$(-\infty, A)$

$\Rightarrow$ CERRADA $[A, +\infty]$

$[-\infty, A]$

## ENTORNOS

$\Rightarrow$ SIMETRICO $(a - r, a + r)$

a = centro del entorno

r = radio del entorno

x = cualquier punto del entorno

$a - r < x < a + r$

$| x - a | < r$

$\Rightarrow$ REDUCIDO $]a - r, a + r[ - \{a\}$

$a - r < x < a + r - \{a\}$

$0 < | x - a | < r$

# PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

| | |
|---|---|
| $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $a^1 = a$ |
| $a^m : a^n = a^{m-n}$ | $a^0 = 1$ |
| $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ | $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ |
| $a^{-n} = 1/a^n$ | $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ |
| $1/a^{-n} = a^n$ | $a^n : b^n = (a/b)^n$ |

# PRODUCTOS NOTABLES

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$$

# RACIONALIZACIÓN

## VAMOS A DIFERENICAR 3 MODELOS.

1. $\dfrac{b}{\sqrt{a}} = \dfrac{b\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \dfrac{b\cdot\sqrt{a}}{a}$
2. $\dfrac{b}{\sqrt[n]{a^m}} = \dfrac{b\cdot\sqrt[n]{a^{n\cdot m}}}{\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n]{a^{n\cdot m}}} = \dfrac{b\cdot\sqrt[n]{a^{n\cdot m}}}{a}$
3. $\dfrac{M}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{M\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \dfrac{M\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$

# LOGARITMOS

$\boxed{\log_a N = E \iff N = a^E}$

El logaritmo en base **a** de un número **N** es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número. Se debe saber que:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^n = n$
4. sólo existen logaritmos de números positivos
5. $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

## OPERACIONES CON LOGARITMOS

$\log (A\cdot B) = \log A + \log B$
$\log A/B = \log A – \operatorname{Log} B$
$\log A^B = B \log A$

## CAMBIO DE BASE EN LOGARITMOS

$\boxed{\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}}$

# ERROR

ERROR ABSOLUTO $E_a = |V_r - V_{ap}| \begin{cases} E_a = \text{Error absoluto} \\ V_r = \text{Valor real} \\ V_{ap} = \text{Valor aproximado} \end{cases}$

ERROR RELATIVO $E_r = \dfrac{E_a}{V_r} \begin{cases} E_r = \text{Error relativo} \\ E_a = \text{Error absoluto} \\ V_r = \text{Valor real} \end{cases}$

***NOTA: La cota de error de un redondeo de orden n es media unidad de ese orden.***

# CALCULO FINANCIERO

## AUMENTO Y DISMINUCIÓN PORCENTUAL

AUMENTO PORCENTUAL del $r\% = 1 + \frac{r}{100}$

DISMINUCIÓN PORCENTUAL del $r\% = 1 - \frac{r}{100}$

## INTERÉS COMPUESTO

PAGO **ANUAL** DE INTERESES $C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \begin{cases} C_F = \text{Capital final} \\ C_0 = \text{Capital inicial} \\ r = \text{rédito} \\ \text{n} = \text{número de años} \end{cases}$

PAGO **MENSUAL** DE INTERESES $C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^m \begin{cases} C_F = \text{Capital final} \\ C_0 = \text{Capital inicial} \\ r = \text{rédito} \\ \text{m} = \text{número de meses} \end{cases}$

PAGO **DIARIO** DE INTERESES $C_F = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{36000}\right)^d \begin{cases} C_F = \text{Capital final} \\ C_0 = \text{Capital inicial} \\ r = \text{rédito} \\ \text{d} = \text{número de días} \end{cases}$

**NOTA: En el pago diario de intereses, el rédito se puede dividir de 36.000 (año comercial) o de 36.500 (año natural).**

## AMORTIZACIÓN

ANUALIDADES DE AMORTIZACIÓN DE UN PRESTAMO

$$a = C \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \qquad i = r/100$$

MENSUALIDADES DE AMORTIZACIÓN DE UN PRESTAMO

$$m = C \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \qquad i = r/1200$$

# ECUACIONES

## ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ Soluciones $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

**Discriminante:** $\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c \begin{cases} \Delta > 0 & 2 \text{ soluciones reales distintas} \\ \Delta = 0 & 1 \text{ solución real (doble)} \\ \Delta < 0 & 2 \text{ soluciones complejas (conjugadas)} \end{cases}$

## ECUACIONES BICUADRADAS

Ej. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

Pasos

1. Cambio de variable $\left.\begin{matrix} x^2 = t \\ x^4 = t \end{matrix}\right\} \rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$
2. Resolución de la ecuación de segundo grado resultante

   $t = \dfrac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases}$
3. Deshacemos el cambio de variable

   $x^2 = 1$ $\quad$ $x^2 = -4$

   $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{-4}$ No tiene solución real

## ECUACIONES IRRACIONALES

Ej. $\sqrt{x+3} - 5 = 2\cdot x - 14$

Pasos

1. Aislar el término que contiene el radical en uno de los miembros de la ecuación.

$\sqrt{x+3} = 2x - 14 + 5$

$\sqrt{x+3} = 2x - 9$

2. Eliminar el radical del término aislado, elevando al cuadrado los dos términos de la ecuación.

   $\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (2x-9)^2$ **NOTA: Fijémonos que pueden formarse productos notables.**

   $x + 3 = 4x^2 + 81 - 36x$
3. Agrupar términos semejantes

   $x + 3 = 4x^2 + 81 - 36x$

   $-4x^2 + 37x - 78 = 0$

   **NOTA: Si todavía quedase algún radical en la ecuación se repite el proceso, hasta eliminar los radicales.**
4. Se soluciona la ecuación resultante

   $$x = \frac{-37 \pm \sqrt{37^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-78)}}{2\cdot(-4)} = \frac{-37 \pm 11}{-8} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{26}{8} = \dfrac{13}{4} \\ x_2 = 6 \end{cases}$$
5. Comprobar resultados, para ello sustituimos en la ecuación inicial los valores obtenidos y tenemos que obtener el mismo valor a ambos lados del igual.

- Para $x = 13/4$ $\quad$ $\sqrt{\dfrac{13}{4} + 3} - 5 \neq 2\cdot\dfrac{13}{4} - 14$ NO ES SOL.

- Para $x = 6$
$$\sqrt{6+3} - 5 = 2 \cdot 6 - 14$$
$$3 - 5 = 12 - 14$$
$$-2 = -2$$

Por lo tanto la solución es $x = 6$.

**NOTA: En una ecuación irracional, puede ser que todos los resultados obtenidos de resolver la ecuación sean solución válida, que sólo lo sea uno de ellos o que no sea ninguno.**

## RESOLUCIÓN DE ECUACIONES GRADO SUPERIOR A 2-RUFFINI

Ejemplo: P(x)= $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

Para resolverlo, si se puede, se prueba por todos los divisores del último término hasta dar con el que nos haga de resto 0.En este caso los divisores de 15 son ±1,±3,±5,±15
Para comenzar lo más correcto es pensar con que número se obtiene 0 en último lugar. Si no aconsejamos seguir un orden. En este caso empezamos en los positivos de menor a mayor
Por 1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -7 | 7 | 15 |
| 1 | | 1 | -6 | 1 |
| | 1 | -6 | 1 | 16 |

Como no obtenemos 0 en el último miembro (resto), seguimos probando por los demás divisores.
Por 3

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -7 | 7 | 15 |
| 3 | | 3 | -12 | -15 |
| | 1 | -4 | -5 | **0** |

**NOTA: En el caso que la ecuación fuera superior a orden 3. Si fuera posible tendríamos que repetir el proceso con los resultados obtenidos tantas veces como sea necesario hasta conseguir el objetivo de poder formar una ecuación de segundo grado.**

Como salió de resto 0 es raíz del polinomio, en el caso de que no hubiera salido 0 se sigue probando. Como nos queda un polinomio de orden 2 podemos resolverlo directamente.
Ejemplo: $x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} \rightarrow = \dfrac{4+6}{2} = 5 \\ \rightarrow = \dfrac{4-6}{2} = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto:
Las raíces del polinomio P(x) son -1, 3, 5
Descomposición factorial P(x)= $(x+1)\cdot(x-5)\cdot(x-3)$

## INECUACIONES

### INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Se escriben de la siguiente forma:

- Menor o igual $ax+b\leq 0$
- Menor $ax+b<0$
- Mayor $ax+b>0$
- Mayor o igual $ax+b\geq 0$

La solución de una ecuación es el conjunto de valores que verifica la inecuación. La solución la podemos expresar mediante un intervalo o una representación gráfica.
Ejemplo:

$$2x-1\geq 3x+7$$
$$2x-3x\geq 7+1$$
$$-x\geq 8$$
$$x\leq -8$$

**NOTA: al cambiar el signo a la incógnita se cambia el sentido al símbolo de comparación**

### INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Para resolverlas:

1. Se igualan a cero y se resuelve como ecuación de segundo grado.

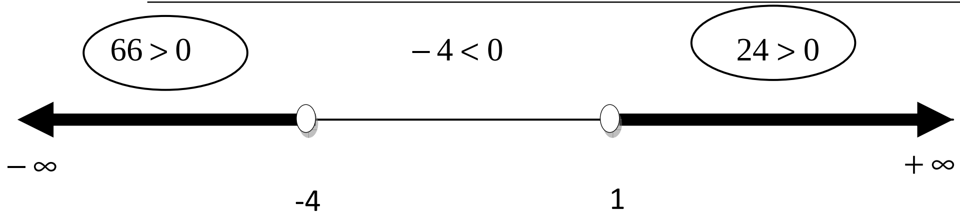
$$x^2+3x-4>0$$
$$x^2+3x-4=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}=\begin{cases}=\dfrac{-3+5}{2}=1\\[2ex]=\dfrac{-3-5}{2}=-4\end{cases}$$

2. Se representa las soluciones en la recta real. Y se dan valores a la expresión comprendidos entre las soluciones obtenidas en el punto anterior. En este caso escogeremos el -10, el 0 y el 4.

$$(-10)^2+3\cdot(-10)-4=100-34=66>0$$
$$(0)^2+3\cdot(0)-4=-4<0$$
$$(4)^2+3\cdot 4-4=28-4=24>0$$

Se observa en la inecuación que nos pide que sea mayor o igual que 0, $x^2+3x-4\geq 0$. Por lo tanto la solución son aquellos intervalos que al sustituir un valor en la ecuación que este dentro del intervalo nos de una solución mayor que 0. En nuestro caso los intervalos solución son $(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$.




**NOTA: Para representarlo sobre la recta real o para dar la solución en forma de intervalos, hay que tener en cuenta que si la inecuación es mayor o menor $(< \text{o} >)$, al dar los resultados en forma de intervalo se forman con paréntesis y en la recta real sin relleno. En cambio si en la inecuación es mayor igual o menor igual $(\leq \text{o} \geq)$ al dar los resultados en forma de intervalo se forma con corchetes, y se representa mediante puntos con relleno.**
**NOTA: El infinito siempre se representa en el intervalo con un paréntesis.**

### INECUACIONES RACIONALES

Ej. $\dfrac{x+2}{x-3} \leq 0$

Para resolver este tipo de inecuaciones se iguala a cero el numerador y el denominador. Y con los valores obtenidos se representa en la recta real igual que en el punto anterior, y se sustituye en la ecuación para conocer si el valor que toma la función es positivo o negativo.

**NOTA: Los resultados se representan de forma igual que en las ecuaciones de segundo grado. Lo único que el resultado obtenido de igualar el denominador a cero es siempre abierto es decir en forma de intervalo se representa con paréntesis o sin relleno si es gráficamente.**

$x+2=0 \quad x-3=0$

$x=-2 \qquad x=3$


Sol. $[2,3)$ El 3 es abierto ya que no se puede dar ese valor por estar en el denominador, ya que nos quedaría una fracción cuyo denominador es nulo.

## CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$\left.\begin{aligned} ax+by&=k_1 \\ cx+dy&=k_2 \end{aligned}\right\}$ Dado este sistema

Clasificación de los sistemas:

1. El sistema es compatible determinado si $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{c}{d}$
2. El sistema es compatible indeterminado si $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{k_1}{k_2}$
3. El sistema es incompatible si $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{d} \neq \dfrac{k_1}{k_2}$

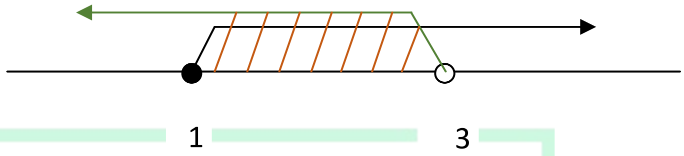
Métodos de resolución: Sustitución, igualación, reducción y gráfico

## SISTEMAS DE INECUACIONES DE UNA SOLA INCOGNITA

Se resuelve cada inecuación por separado, y se representa sobre la misma recta las dos soluciones obtenidas. Aquellos puntos donde coincidan serán la solución del sistema.

Ejemplo

$$\begin{cases} 2x-1 \geq -2x+3 \\ 3x+2x<15 \end{cases}$$




| | |
|---|---|
| $2x-1 \geq -2x+3$ | $3x+2x<15$ |
| $2x+2x \geq 4$ | $5x<15$ |
| $4x \geq 4$ | $x<3$ |
| $x \geq 1$ | |

$sol.[1,3)$

# FUNCIONES

## DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Función real de variable real es toda correspondencia que asocia a cada elemento de un determinado subconjunto de números reales otro número real. **y = $f$(x)**

Al conjunto de valores de la variable independiente **x** se le llama **dominio** de la función o **campo de existencia**.

Al conjunto de valores de la variable dependiente **y** se le llama **recorrido** de la función o **imagen de la función**.

## FUNCIONES SIMETRICAS

- Simetría con respecto al origen (función impar) **$f$(-x) = -$f$(x)**
- Simetría con respecto al eje de ordenadas (función par) **$f$(-x) = $f$(x)**

## LÍMITE DE FUNCIONES

### INDETERMINACIONES CUANDO SE TIENDE A UN PUNTO

1. $\frac{k}{0} \Rightarrow (k \neq 0)$ se calculan los límites laterales, por la izquierda y derecha al punto
2. $\frac{0}{0} \Rightarrow$ se descomponen en factores numerador y denominador, a continuación se simplifica. En el caso de que hubiese raíces sumando o restando en el numerador o denominador se multiplica y divide por el conjugado.

### INDETERMINACIONES CUANDO SE TIENDE A INFINITO

1. $\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ se divide numerador y denominador por la potencia máxima de x que haya en el denominador. De forma simplificada para hallar el límite de una función $\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$.

a. Si el grado del numerador $P(x)$ es mayor que el grado del denominador $Q(x)$, el límite es $\pm\infty$.
b. Si el grado del numerador $P(x)$ es igual que el grado del denominador $Q(x)$, se dividen coeficientes principales.
c. Si el grado del numerador $P(x)$ es mayor que el grado del denominador $Q(x)$, el límite es 0

2. $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty \Rightarrow$ se multiplica y se divide la función por la expresión radical conjugada

3. $1^{\infty}$ se aplica el siguiente concepto $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

## CONTINUIDAD DE FUNCIONES

$f(x)$ continua en x = a

1. $\exists f(a) \Rightarrow a \in \mathrm{dom} f(x)$
2. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
3. $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

## DERIVADAS

### FÓRMULA A PARTIR DEL LÍMITE

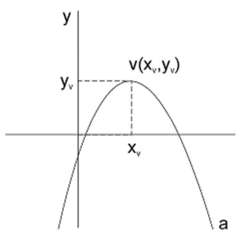
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

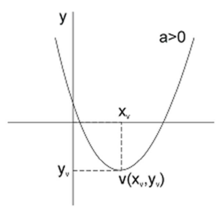
**NOTA: La tabla de derivadas la hemos situado en el anexo 2**

## DOMINIOS

1. FUNCIONES POLINÓMICAS: El dominio son todos los reales
2. FUNCIONES RACIONALES: El dominio son todos los reales menos los valores que anulan el denominador
3. FUNCIONES IRRACIONALES: Son todos los valores que hacen el radicando positivo o cero
4. FUNCIONES LOGARÍTMICAS: Son todos los valores que hacen el logaritmo mayor que cero

## FUNCION CUADRÁTICA $\boxed{y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c}$




a) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$

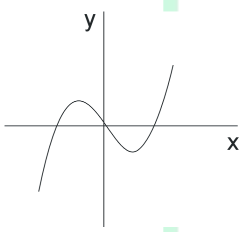
b) $\begin{cases} a>0 \Rightarrow f(D) = [y_v, +\infty) \\ a<0 \Rightarrow f(D) = (-\infty, y_v] \end{cases}$

c) Crecimiento $\begin{cases} a>0 \Rightarrow \begin{cases} creciente\,(x_v, +\infty) \\ decreciente\,(-\infty, x_v) \end{cases} \\ a<0 \Rightarrow \begin{cases} creciente\,(-\infty, x_v) \\ decreciente\,(x_v, +\infty) \end{cases} \end{cases}$

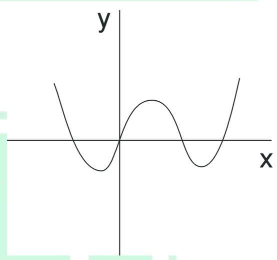
Vértice $\begin{cases} x_v = \dfrac{-b}{2a} \\ y_v = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c \end{cases}$

## FUNCIONES POLINOMICAS $\boxed{y = a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + c \cdot x^{n-2} + .... + d}$

a) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$




$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$




## FUNCION DE PROPORCIONALIDAD INVERSA $\boxed{y = \dfrac{k}{x}}$

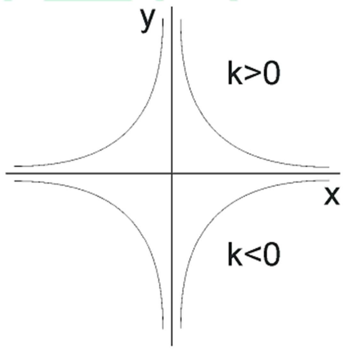
a) Dom$f$ = ℝ - {0}

b) Imagen = ℝ - {0}

c) Simetría $f$(x) = -$f$(-x) $\Rightarrow$ impar

d) Crecimiento

$\begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{decreciente en D} \\ k < 0 \Rightarrow \text{creciente en D} \end{cases}$




## FUNCIONES RACIONALES $\boxed{y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}}$

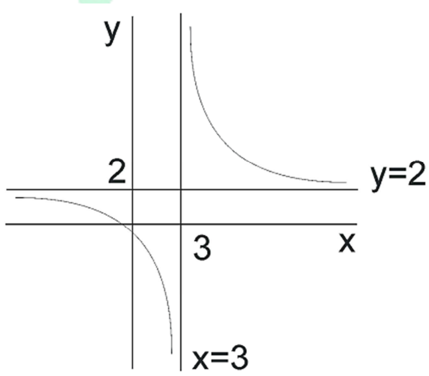
Siendo P(x) y Q(x) polinomios. Ej.: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

a) Dom$f$ = ℝ - {valores de x que anulan al denominador}

Dom$f$ = {x∈ ℝ / cx + d ≠ 0} = ℝ - $\{-\dfrac{d}{c}\}$

b) Cortes con los ejes $\Rightarrow$

$\begin{cases} \text{eje}x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \\ \text{eje}y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d} \end{cases}$



c) Asíntotas $\begin{cases} \text{horizontal} \Rightarrow y = \dfrac{a}{c} \\ \text{verticales} \Rightarrow x = \dfrac{-d}{c} \end{cases}$

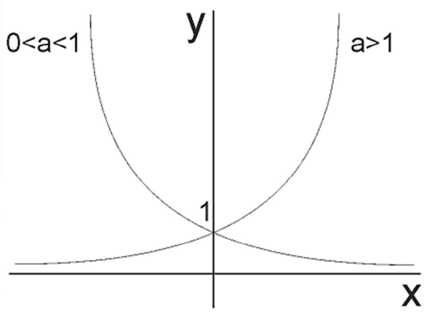
Vamos a representar $y = \dfrac{2x+1}{x+3}$

a) Dom$f$ = $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3\}$

b) Cortes con los ejes $\Rightarrow \begin{cases} \text{ejex} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow P_1(-1/2{,}0) \\ \text{ejey} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2 \cdot 0 + 1}{0 - 3} = \dfrac{-1}{3} \Rightarrow P_2(0{,}-1/3) \end{cases}$

c) Asíntotas $\begin{cases} \text{horizontal} \Rightarrow y = \dfrac{a}{c} = 2 \\ \text{verticales} \Rightarrow x = \dfrac{-d}{c} = 3 \end{cases}$

### FUNCIONES EXPONENCIALES $\boxed{y = a^x}$




a) Dom$f$ = $\mathbb{R}$

b) Recorrido = $(0,+\infty)$

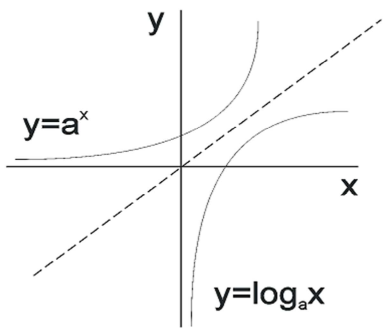
c) Puntos de corte: (0,1)

d) Crecimiento

$\begin{cases} a > 1 \Rightarrow \text{creciente en todo el dominio} \\ 0 < a < 1 \Rightarrow \text{decreciente en todo el dominio} \end{cases}$

e) Asíntotas: y = 0 es una asíntota horizontal

### FUNCIONES LOGARITMICAS $\boxed{y = \log_a x}$




a) Dom$f$ = $(0,+\infty)$

b) Recorrido = $\mathbb{R}$

c) Puntos de corte: (1,0) y (a,1)

d) Creciminiento

$\begin{cases} a > 1 \Rightarrow \text{creciente en todo el dominio} \\ 0 < a < 1 \Rightarrow \text{decreciente en todo el dominio} \end{cases}$

e) Asíntotas: x = 0 es una asíntota vertical

La función exponencial y la función logarítmica son funciones recíprocas. Son simétricas respecto a la bisectriz del 1$^{er}$ cuadrante

## PROBABILIDAD

### DEFINICIÓN DE LA PLACE

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables al suceso A}}{\text{nº de casos posibles}}$$

## DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

La probabilidad es una función que asigna a cada suceso A de E un número real P(A), que cumple los siguientes axiomas:

1º ) $0 \leq P(A) \leq 1$
2º ) $P(E) = 1$
3º ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$ (sucesos incompatibles)

Consecuencias:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$ (sucesos compatibles)
$P(A) \leq P(B)$ si $A \subset B$

## PROBABILIDAD CONDICIONADA

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

## SUCESOS INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES

Dos sucesos A y B son independientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A no influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{o} \quad P(B/A) = P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dos sucesos A y B son dependientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) \neq P(A) \quad \text{o} \quad P(B/A) \neq P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

## DIAGRAMA DE ÁRBOL

Si un primer experimento puede hacerse de n maneras diferentes y un segundo experimento puede hacerse de m maneras diferentes, los dos experimentos juntos pueden hacerse de n $\times$ m maneras diferentes.

El diagrama de árbol es una herramienta que nos facilita la aplicación de este principio (principio general del recuento).
Ejemplo: Una urna con 2 bolas rojas, y 3 azules. Se dispone también de un dado. Y se pide calcular las siguientes probabilidades:

a. Saber la probabilidad de sacar una bola roja y después un dos
b. Saber la probabilidad de sacar una bola roja y un número par.

Para ello construimos el diagrama de árbol. Aunque se podría hacer sin construir todo el diagrama, así se puede utilizar de guía para futuros ejercicios.

En este diagrama se trata de representar las diferentes opciones que tenemos, junto con la probabilidad de obtener cada una.

Bola roja $\frac{2}{5}$

1 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 1

2 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un dos

3 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 3

4 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 4

5 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 5

6 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 6

bola azul $\frac{3}{5}$

1 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 1

2 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 2

3 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 3

4 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 4

5 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 5

6 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 6

Apartado a. Esta probabilidad ya la da el diagrama de árbol directamente y es $\frac{1}{15}$

Apartado b. En este caso tenemos que sumar las probabilidades de sacar un 2 un 4 y un 6.

$\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ Es la probabilidad de sacar una bola roja y un número par.

## TABLA DE CONTINGENCIA

| | $A$ | $\overline{A}$ | $TOTAL$ |
|---|---|---|---|
| $B$ | $P(A\cap B)$ | $P(\overline{A}\cap B)$ | $P(B)$ |
| $\overline{B}$ | $P(A\cap \overline{B})$ | $P(\overline{A}\cap \overline{B})$ | $P(\overline{B})$ |
| $TOTAL$ | $P(A)$ | $P(\overline{A})$ | 1 |

## SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS

Familia de sucesos $A_1, A_2,\dots,A_n$ de sucesos de S que cumplen:

a) Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \varnothing$

b) La unión de todos ellos es el suceso seguro $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

## TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sea $A_1, A_2,\dots,A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la **probabilidad del suceso B** viene dada por la expresión :

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B/A_1) + \dots + P(A_N)P(B/A_N) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B/A_i)$$

## BINOMIAL

Experimento aleatorio con las siguientes **características:**

- En cada prueba del experimento sólo son posibles dos resultados: el suceso A (éxito) y su contrario $\overline{A}$ (fracaso). Ejemplo sacar cara o cruz en una moneda.
- El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos anteriormente.
- La probabilidad del suceso A es constante, la representamos por *p*, y no varía de una prueba a otra. La probabilidad de $\overline{A}$ es 1- *p* y la representamos por *q*. Ejemplo la probabilidad de que salga cara en una moneda es 0,5 y no varía de un lanzamiento a otro. La probabilidad del suceso contrario a salir cara es decir que salga cruz es 0,5.
- El experimento consta de un número de pruebas. Ejemplo: que tiremos la moneda 7 veces

Variable binomial, esta variable de tipo discreta se expresa como **B(n,p),** donde **n** y **p** son los parámetros de la distribución.

La función de probabilidad de la variable aleatoria binomial para obtener n éxitos, tiene, la expresión :

$$\boxed{P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}, \quad \text{para } x = 1,2,3\dots n}$$

$$\boxed{\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} = \frac{n\cdot(n-1).(n-2)......(n-x+1)}{x(x-1)(x-2)......2.\ 1}}$$

**NOTA: Valor de un número combinatorio. Esto es para calcular la primera parte de la fórmula. Lo más fácil es hacerlo a través de la calculadora. En el ejemplo siguiente se puede hacer en la calculadora pulsando 7 nCr (nombre de la tecla en la calculadora) y pulsando 3**

Ejemplo: $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot(4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1)} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35$

**PARÁMETROS DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**

1. MEDIA $\boxed{\mu = n\times p}$
2. VARIANZA $\boxed{\sigma^2 = n\times p\times q}$
3. DESVIACIÓN TÍPICA $\boxed{\sigma = \sqrt{n\times p\times q}}$

## DISTRIBUCIÓN NORMAL

**TIPIFICACIÓN DE UNA VARIABLE.**

Si x es una variable aleatoria N$(\mu,\sigma)$ entonces la variable aleatoria tipificada de x es. La tipificación se realiza para saber la equivalencia en la N$(0,1)$, que es aquella que se puede mirar en la tabla.

$$\boxed{z = \frac{x-\mu}{\sigma}}$$

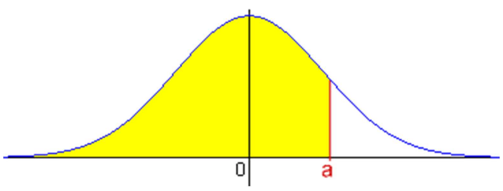
**MANEJO DE TABLAS CASOS FRECUENTES.**

La probabilidad de la variable z con distribución N(0,1) se halla mediante tablas, están dan las probabilidades de que la variable z tome un valor menor o igual que una determinada cantidad a : P(z≤a)

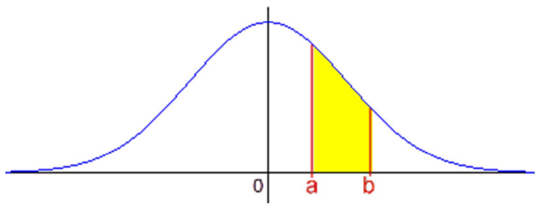
**NOTA: La tabla se puede descargar en la sección de tablas de ayuda.**

Los casos que más se nos presentan son:

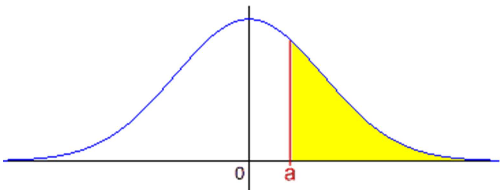
$P(Z\le a)\rightarrow Tablas$



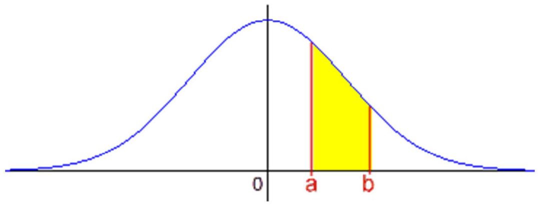

$P(a<Z\le b)= P(Z\le b)- P(Z\le a)$



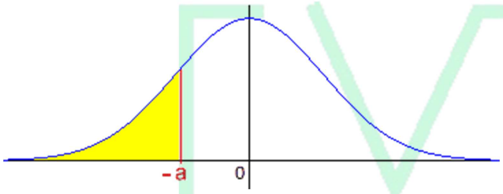
$P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$



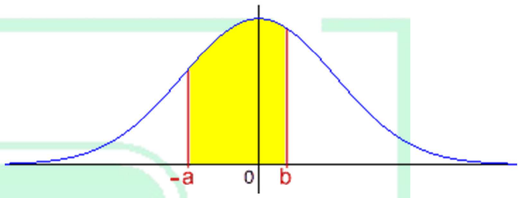

$P(a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$



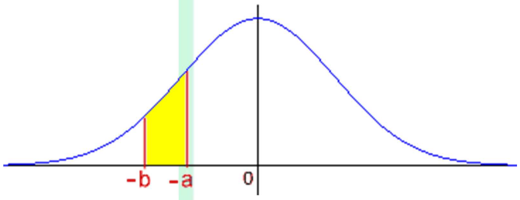

$P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$




$P(-a < Z \leq b) = P(Z \leq b) - [1 - P(Z \leq a)]$




$P(-b < Z \leq -a) = P(a < Z \leq b)$




## TEOREMA DE MOIVRE, APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL A LA NORMAL.

De Moivre demostró que bajo determinadas condiciones la distribución binomial B(n,p) se puede aproximar mediante la distribución normal. Esto es necesario ya que para determinados casos usar la binomial es demasiado largo y tedioso.

Las condiciones de aplicabilidad del teorema de DeMoivre son que se verifiquen simultáneamente las siguientes desigualdades:
$np \geq 5 \quad n(1-p) \geq 5$

Cuanto mayor sea el valor de n y cuanto más próximo sea el valor de p a 0,5, tanto mejor será la aproximación realizada.

Una vez que se confirman podemos aproximar a la normal a partir de la binomial B(n,p) usando $N(np,\ \sqrt{n \cdot p \cdot q}\ )$.

Ejemplo B(60,0,4) comprobamos que $\begin{array}{l} n \cdot p = 60 \cdot 0,4 = 24 \rangle 5 \\ n \cdot q = 60 \cdot 0,6 = 36 \rangle 5 \end{array}$

Por lo tanto usamos $N(np\ 60 \cdot 0,4\ ,\ \sqrt{n \cdot p \cdot q}\ \sqrt{60 \cdot 0,4 \cdot 0,6}) = N(24\ ,\ 3,79)$

### CORRECCIÓN POR CONTINUIDAD

La distribución binomial es de variable aleatoria y, por tanto, tiene sentido calcular probabilidades puntuales; por ejemplo, hallar la probabilidad de que en un clase el Lunes se pongan enfermas dos personas P(X=2). En cambio, la distribución normal es de variable aleatoria continua, y no tiene sentido calcular probabilidades puntuales, pues son todas nulas. Por lo tanto al pasar de binomial a normal hay que hacer una pequeña corrección.

Para calcular probabilidades basta considerar los valores de la variable aleatoria discreta como marcas de clase de intervalos del siguiente modo:

$$P(X=a)=P(a-0{,}5<X'\leq a+0{,}5) \quad P(X<a)=P(X'\leq a+0{,}5)$$
$$P(a<x<b)=P(a-0{,}5\leq X'\leq b+0{,}5) \quad P(X>a)=P(X'\geq a-0{,}5)$$

Siendo X una variable aleatoria B(n,p) y X´ una variable aleatoria $N(np,\sqrt{n\cdot p\cdot q})$

# ESTADÍSTICA

## MEDIA ARITMÉTICA

$$\bar{X}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum x_i f_i$$

## MEDIANA

Es el valor que divide a la distribución en dos partes iguales

## MODA

Es el valor de la distribución que más veces se repite

## VARIANZA

$$S_x^2=\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\bar{X}^2$$

## DESVIACIÓN TÍPICA

$$S_x=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\bar{X}^2}$$

## COVARIANZA

$$S_{xy}=\frac{\left(x_1-\bar{X}\right)\left(y_1-\bar{y}\right)+\left(x_2-\bar{X}\right)\left(y_2-\bar{y}\right)+\ldots+\left(x_n-\bar{X}\right)\left(y_n-\bar{y}\right)}{n}$$

o también $S_{xy}=\dfrac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{n}-\bar{x}\,\bar{y}$

## COEFICIENTE DE CORRELACIÓN DE PEARSON

$$r=\frac{S_{xy}}{S_xS_y}$$

si r ≅ 1 dependencia lineal fuerte y directa

si r ≅ 0 independientes

si r ≅ -1 dependencia lineal fuerte e inversa

en otros casos la dependencia es aleatoria

## RECTA DE REGRESIÓN

Recta de regresión de y sobre x $\Rightarrow y - \bar{y} = \dfrac{Sxy}{S^2x}\left(x - \bar{x}\right)$

Recta de regresión de x sobre y $\Rightarrow x - \bar{x} = \dfrac{Sxy}{S^2y}\left(y - \bar{y}\right)$

## ANEXO-2 TABLA DE DERIVADAS

| FUNCIONES | DERIVADAS |
|---|---|
| $y = k\ ,\ k \equiv \text{cte.}$ | $y' = 0$ |
| $y = x$ | $y' = 1$ |
| $y = u + v$ | $y' = u' + v'$ |
| $y = \dfrac{u}{v}$ | $y' = \dfrac{u'.v' - v'.u'}{v^2}$ |
| $y = x^n\ ,\ n \in \Re$ | $y' = n.x^{n-1}$ |
| $y = u^n$ | $y' = n.u^{n-1} \cdot u'$ |
| $y = \sqrt[n]{x}$ | $y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ |
| $y = \sqrt[n]{u}$ | $y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$ |
| $y = \text{Ln}\ x$ | $y' = \dfrac{1}{x}$ |
| $y = \text{Ln}\ u$ | $y' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$ |
| $y = \log_a x$ | $y' = \dfrac{1}{x} \log_a e$ |
| $y = \log_a u$ | $y' = \dfrac{1}{u} u' \log_a e$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ |
| $y = e^u$ | $y' = e^u \cdot u'$ |
| $y = a^x$ | $y' = a^x \cdot \text{Ln}\,a$ |
| $y = a^u$ | $y' = a^u\ u' \text{Ln}\,a$ |
| $y = \text{sen}\ x$ | $y' = \cos x$ |
| $y = \text{sen}\ u$ | $y' = \cos u \cdot u'$ |
| $y = \cos x$ | $y' = -\ \text{sen}\ x$ |
| $y = \cos u$ | $y' = -\text{sen}\,u \cdot u'$ |
| $y = \text{tg}\ x$ | $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2\ x$ |
| $y = \text{tg}\ u$ | $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot u'$ |
| $y = \text{co tg}\ x$ | $y' = -\dfrac{1}{\text{sen}^2\ x}$ |
| $y = \text{co tg}\ u$ | $y' = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} \cdot u'$ |
| $y = \sec u$ | $y' = \sec u \cdot \text{tg}\,u \cdot u'$ |
| $y = \text{cosec}\ u$ | $y' = -\text{cosec}\,u \cdot \text{cotg}\,u \cdot u'$ |

| FUNCIONES | DERIVADAS |
|---|---|
| $y = \text{arc sen}\ x$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| $y = \text{arc sen}\ u$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$ |
| $y = \text{arc cos}\ x$ | $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| $y = \text{arc cos}\ x$ | $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$ |
| $y = \text{arc tg}\ x$ | $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ |
| $y = \text{arc tg}\ u$ | $y' = \dfrac{1}{1 + u^2} \cdot u'$ |
| $y = \text{arc cotg}\ x$ | $y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$ |
| $y = \text{arc cotg}\ u$ | $y' = \dfrac{-1}{1 + u^2} \cdot u'$ |
| $y = \text{Sh}\ x$ | $y' = \text{Ch}\ x$ |
| $y = \text{Sh}\ u$ | $y' = \text{Ch}\,u \cdot u'$ |
| $y = \text{Ch}\ x$ | $y' = \text{Sh}\ x$ |
| $y = \text{Ch}\ u$ | $y' = \text{Sh}\,u \cdot u'$ |
| $y = \text{Th}\ x$ | $y' = \dfrac{1}{Ch^2\ x}$ |
| $y = \text{Th}\ u$ | $y' = \dfrac{1}{Ch^2 u} \cdot u'$ |
| $y = \text{Arg Ch}\ x$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ |
| $y = \text{Arg Ch}\ u$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \cdot u'$ |
| $y = \text{Arg Sh}\ x$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |
| $y = \text{Arg Sh}\ u$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \cdot u'$ |
| $y = \text{Arg Th}\ u$ | $y' = \dfrac{1}{1 - u^2} \cdot u'$ |