MATEMÁTICAS
4º ESO

$f(x)$

ACADEMIA TAMARGO, S.L.U.

SÍGUENOS EN:

Haga clic para agregar texto

ACADEMIA TAMARGO, S.L.U.

Índice de contenidos

CONTENIDO

INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS

INTERVALOS

⇒ ABIERTO (A, B)

⇒ CERRADO $[A, B]$

SEMIRRECTAS

⇒ ABIERTA $(A, +\infty)$

$(-\infty, A)$

⇒ CERRADA $[A, +\infty]$

$[-\infty, A]$

ENTORNOS

⇒ SIMETRICO (a – r, a + r)

a = centro del entorno

r = radio del entorno

x = cualquier punto del entorno

a – r < x < a + r

| x – a | < r

⇒ REDUCIDO] a – r, a + r [- { a }

a – r < x < a + r - { a }

0 < | x – a | < r

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^1 = a$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^0 = 1$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
$a^{-n} = 1/a^n$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
$1/a^{-n} = a^n$	$a^n : b^n = (a/b)^n$

PRODUCTOS NOTABLES

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$$

RACIONALIZACIÓN

VAMOS A DIFERENICAR 3 MODELOS.

1. $\dfrac{b}{\sqrt{a}} = \dfrac{b \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \dfrac{b \cdot \sqrt{a}}{a}$
2. $\dfrac{b}{\sqrt[n]{a^m}} = \dfrac{b \cdot \sqrt[n]{a^{n \cdot m}}}{\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n \cdot m}}} = \dfrac{b \cdot \sqrt[n]{a^{n \cdot m}}}{a}$
3. $\dfrac{M}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{M \cdot \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \dfrac{M \cdot \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$

LOGARITMOS

$\boxed{\log_a N = E \Leftrightarrow N = a^E}$

El logaritmo en base **a** de un número **N** es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número. Se debe saber que:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^n = n$
4. sólo existen logaritmos de números positivos
5. $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

OPERACIONES CON LOGARITMOS

$\log (A \cdot B) = \log A + \log B$
$\log A/B = \log A - \text{Log } B$
$\log A^B = B \log A$

CAMBIO DE BASE EN LOGARITMOS

$$\boxed{\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}}$$

ERROR

ERROR ABSOLUTO $E_a = \left|V_r - V_{ap}\right| \begin{cases} E_a = \text{Error absoluto} \\ V_r = \text{Valor real} \\ V_{ap} = \text{Valor aproximado} \end{cases}$

ERROR RELATIVO $E_r = \dfrac{E_a}{V_r} \begin{cases} E_r = \text{Error relativo} \\ E_a = \text{Error absoluto} \\ V_r = \text{Valor real} \end{cases}$

NOTA: La cota de error de un redondeo de orden n es media unidad de ese orden.

ECUACIONES

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$\boxed{ax^2+bx+c=0}$ Soluciones $\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

Discriminante: $\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c\begin{cases}\Delta>0 & \text{2 soluciones reales distintas}\\ \Delta=0 & \text{1 solución real (doble)}\\ \Delta<0 & \text{2 soluciones complejas (conjugadas)}\end{cases}$

ECUACIONES BICUADRADAS

Ej. $x^4+3x^2-4=0$

Pasos

1. Cambio de variable $\left.\begin{matrix}x^2=t\\ x^4=t\end{matrix}\right\}\rightarrow t^2+3t-4=0$
2. Resolución de la ecuación de segundo grado resultante
   $t=\frac{-3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm5}{2}=\begin{cases}t=1\\ t=-4\end{cases}$
3. Deshacemos el cambio de variable
   $x^2=1$ $x^2=-4$
   $x=\pm\sqrt{1}=\pm1$ $x=\pm\sqrt{-4}$ No tiene solución real

ECUACIONES IRRACIONALES

Ej. $\sqrt{x+3}-5=2\cdot x-14$

Pasos

1. Aislar el término que contiene el radical en uno de los miembros de la ecuación.

$\sqrt{x+3}=2x-14+5$

$\sqrt{x+3}=2x-9$

2. Eliminar el radical del término aislado, elevando al cuadrado los dos términos de la ecuación.
   $\left(\sqrt{x+3}\right)^2=(2x-9)^2$ **NOTA: Fijémonos que pueden formarse productos notables.**
   $x+3=4x^2+81-36x$
3. Agrupar términos semejantes
   $x+3=4x^2+81-36x$
   $-4x^2+37x-78=0$

NOTA: Si todavía quedase algún radical en la ecuación se repite el proceso, hasta eliminar los radicales.

4. Se soluciona la ecuación resultante

$$x = \frac{-37 \pm \sqrt{37^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-78)}}{2\cdot(-4)} = \frac{-37 \pm 11}{-8} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{26}{8} = \dfrac{13}{4} \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

5. Comprobar resultados, para ello sustituimos en la ecuación inicial los valores obtenidos y tenemos que obtener el mismo valor a ambos lados del igual.

- Para $x = {}^{13}\!/_{4}$ $\sqrt{\frac{13}{4}+3} - 5 \neq 2\cdot\frac{13}{4} - 14$ NO ES SOL.

- Para $x = 6$

$$\sqrt{6+3} - 5 = 2\cdot 6 - 14$$
$$3 - 5 = 12 - 14$$
$$-2 = -2$$

Por lo tanto la solución es $x = 6$.

NOTA: En una ecuación irracional, puede ser que todos los resultados obtenidos de resolver la ecuación sean solución válida, que sólo lo sea uno de ellos o que no sea ninguno.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES GRADO SUPERIOR A 2-RUFFINI

Ejemplo: P(x)= $x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

Para resolverlo, si se puede, se prueba por todos los divisores del último término hasta dar con el que nos haga de resto 0.En este caso los divisores de 15 son ±1,±3,±5,±15
Para comenzar lo más correcto es pensar con que número se obtiene 0 en último lugar. Si no aconsejamos seguir un orden. En este caso empezamos en los positivos de menor a mayor

Por 1

	1	-7	7	15
1		1	-6	1
	1	-6	1	16

Como no obtenemos 0 en el último miembro (resto), seguimos probando por los demás divisores.

Por 3

	1	-7	7	15
3		3	-12	-15
	1	-4	-5	**0**

NOTA: En el caso que la ecuación fuera superior a orden 3. Si fuera posible tendríamos que repetir el proceso con los resultados obtenidos tantas veces como sea necesario hasta conseguir el objetivo de poder formar una ecuación de segundo grado.

Como salió de resto 0 es raíz del polinomio, en el caso de que no hubiera salido 0 se sigueprobando. Como nos queda un polinomio de orden 2 podemos resolverlo directamente.

Ejemplo: $x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} = \dfrac{4+6}{2} = 5 \\ = \dfrac{4-6}{2} = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto:
Las raíces del polinomio P(x) son -1, 3, 5
Descomposición factorial P(x)= $(x+1) \cdot (x-5) \cdot (x-3)$

INECUACIONES

INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Se escriben de la siguiente forma:

- Menor o igual $ax + b \leq 0$
- Menor $ax + b < 0$
- Mayor $ax + b > 0$
- Mayor o igual $ax + b \geq 0$

La solución de una ecuación es el conjunto de valores que verifica la inecuación. La solución la podemos expresar mediante un intervalo o una representación gráfica.
Ejemplo:

$$2x - 1 \geq 3x + 7$$
$$2x - 3x \geq 7 + 1$$
$$-x \geq 8$$
$$x \leq -8$$

NOTA: al cambiar el signo a la incógnita se cambia el sentido al símbolo de comparación

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Para resolverlas:

1. Se igualan a cero y se resuelve como ecuación de segundo grado.

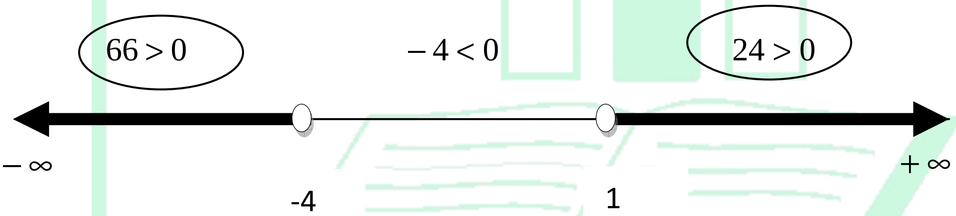
$$x^2+3x-4>0 \qquad x^2+3x-4=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}= \begin{cases} =\dfrac{-3+5}{2}=1 \\ =\dfrac{-3-5}{2}=-4 \end{cases}$$

2. Se representa las soluciones en la recta real. Y se dan valores a la expresión comprendidos entre las soluciones obtenidas en el punto anterior. En este caso escogeremos el -10, el 0 y el 4.

$$(-10)^2+3\cdot(-10)-4=100-34=66>0$$
$$(0)^2+3\cdot(0)-4=-4<0$$
$$(4)^2+3\cdot 4-4=28-4=24>0$$

Se observa en la inecuación que nos pide que sea mayor o igual que 0, $x^2+3x-4\geq 0$. Por lo tanto la solución son aquellos intervalos que al sustituir un valor en la ecuación que este dentro del intervalo nos de una solución mayor que 0. En nuestro caso los intervalos solución son $(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$.



NOTA: Para representarlo sobre la recta real o para dar la solución en forma de intervalos, hay que tener en cuenta que si la inecuación es mayor o menor $(<\text{ o }>)$, al dar los resultados en forma de intervalo se forman con paréntesis y en la recta real sin relleno. En cambio si en la inecuación es mayor igual o menor igual $(\leq\text{ o }\geq)$ al dar los resultados en forma de intervalo se forma con corchetes, y se representa mediante puntos con relleno.

NOTA: El infinito siempre se representa en el intervalo con un paréntesis.

INECUACIONES RACIONALES

Ej. $\dfrac{x+2}{x-3}\leq 0$

Para resolver este tipo de inecuaciones se iguala a cero el numerador y el denominador. Y con los valores obtenidos se representa en la recta real igual que en el punto anterior, y se sustituye en la ecuación para conocer si el valor que toma la función es positivo o negativo.

NOTA: Los resultados se representan de forma igual que en las ecuaciones de segundo grado. Lo único que el resultado obtenido de igualar el denominador a cero es siempre abierto es decir en forma de intervalo se representa con paréntesis o sin relleno si es gráficamente.

$$x+2=0 \quad x-3=0$$
$$x=-2 \quad x=3$$

Sol. $[2,3)$ El 3 es abierto ya que no se puede dar ese valor por estar en el denominador, ya que nos quedaría una fracción cuyo denominador es nulo.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=k_1 \\ cx+dy=k_2 \end{array}\right\}$$ Dado este sistema

Clasificación de los sistemas:

1. El sistema es compatible determinado si $\frac{a}{c} \neq \frac{c}{d}$
2. El sistema es compatible indeterminado si $\frac{a}{c} = \frac{c}{d} = \frac{k_1}{k_2}$
3. El sistema es incompatible si $\frac{a}{c} = \frac{c}{d} \neq \frac{k_1}{k_2}$

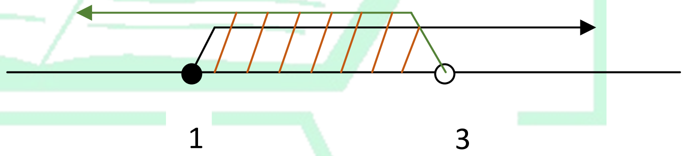
Métodos de resolución: Sustitución, igualación, reducción y gráfico

SISTEMAS DE INECUACIONES DE UNA SOLA INCOGNITA

Se resuelve cada inecuación por separado, y se representa sobre la misma recta las dos soluciones obtenidas. Aquellos puntos donde coincidan serán la solución del sistema.

Ejemplo

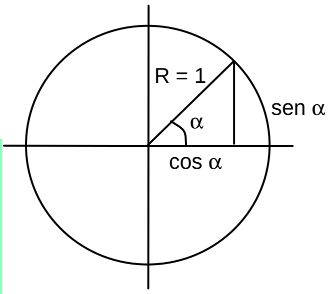
$$\begin{cases} 2x-1 \geq -2x+3 \\ 3x+2x<15 \end{cases}$$

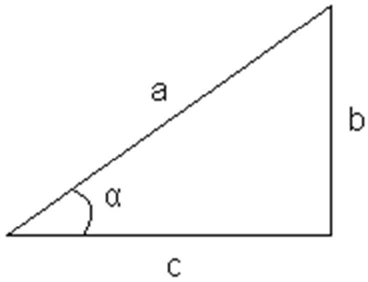


$$\begin{array}{ll} 2x-1 \geq -2x+3 & 3x+2x<15 \\ 2x+2x \geq 4 & 5x<15 \\ 4x \geq 4 & x<3 \\ x \geq 1 & \end{array}$$

$sol.[1,3)$

TRIGONOMETRIA





$$sen\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a} \qquad \cos ec\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{sen\alpha}(sen\alpha \neq 0)$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{c}{a} \qquad \sec\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha \neq 0)$$

$$tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{b}{c} \qquad \cot g\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}(tg\alpha \neq 0)$$

SIGNOS EN LOS CUADRANTES

	1º CUADRANTE	2º CUADRANTE	3er CUADRANTE	4º CUADRANTE
sen α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tg α	+	-	+	-
cosec α	+	+	-	-
sec α	+	-	-	+
cotg α	+	-	+	-

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS MAS COMUNES

	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞ ∄	0	$-\infty$ ∄	0

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA TRIGONOMETRIA

$$\boxed{sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

dividimos por $\cos^2\alpha$

$$\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{tg^2\alpha+1=\sec^2\alpha}$$

dividimos por $sen^2\alpha$

$$\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{1}{sen^2\alpha}$$

$$\boxed{1+\cot g^2\alpha=\cos ec^2\alpha}$$

TEOREMA DEL SENO

Se utiliza con triángulos no rectángulos.

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}$$

TEOREMA DEL COSENO

Se utiliza con triángulos no rectángulos.

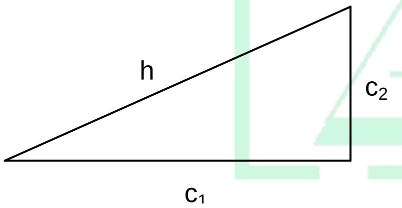
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

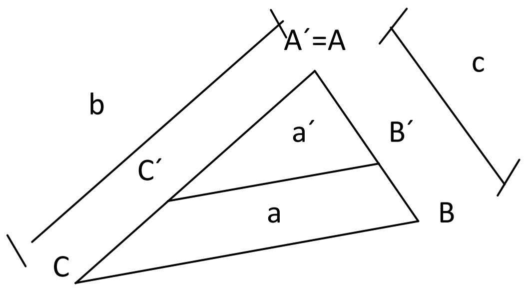
TRIANGULOS EN EL PLANO. TEOREMA DE PITAGORAS

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.
Si los lados de un triángulo verifican la relación de Pitágoras, el triángulo es rectángulo.



$$\boxed{h^2=c_1^2+c_2^2}$$

TEOREMA DE TALES



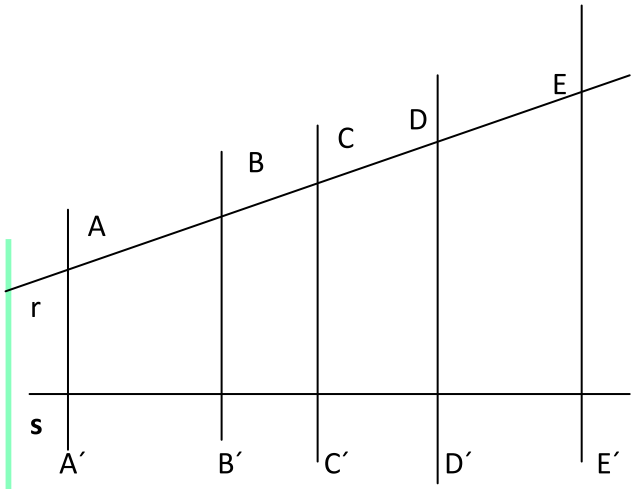
$A'B'C' \sim ABC$

$\hat{A}=\hat{A}'$

$\hat{B}=\hat{B}'$

$\hat{C}=\hat{C}'$

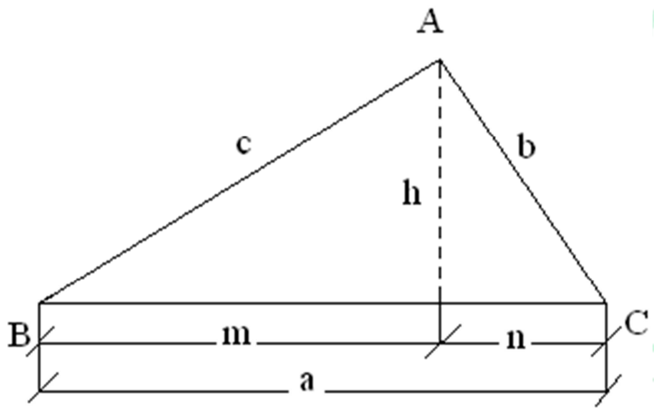
$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\ldots$$

Si cortamos las rectas r y s por una serie de rectas paralelas, los segmentos determinados en una de ellas son proporcionales a los segmentos correspondientes determinados en la otra.

TEOREMA DE LA ALTURA Y DEL CATETO



m → es la proyección del cateto c sobre la hipotenusa
n→ es la proyección del cateto b sobre la hipotenusa
h → es la altura

TEOREMA DEL CATETO: Un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre el.

$$\boxed{b^2 = n \cdot a}$$

$$\boxed{c^2 = m \cdot a}$$

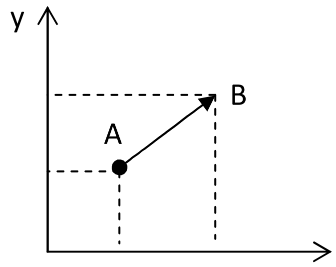
TEOREMA DE LA ALTURA: La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional antre los 2 segmentos que dividen a esta

$$\boxed{h^2 = m \cdot n}$$

GEOMETRÍA PLANA

Suponemos dos puntos:

A (x_A, y_A) B(x_B, y_B)

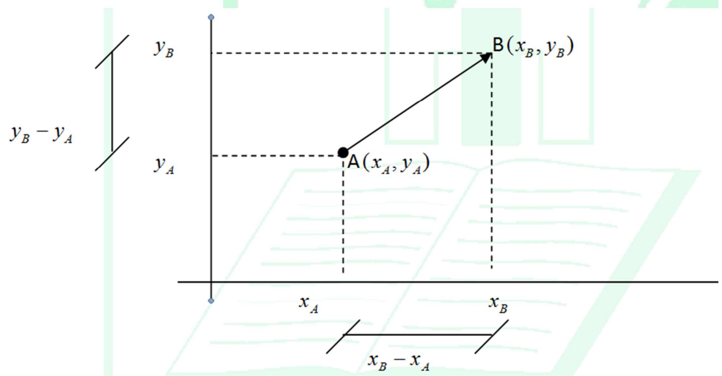


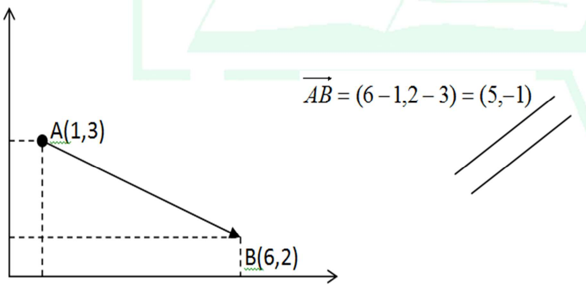
Componentes de un vector: Son las proyecciones del vector sobre los ejes coordenadas. Para hallar las componentes se resta el punto extremo menos el punto origen origen.

$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$ $x_B - x_A \rightarrow 1^a\,Componente$

$y_B - y_A \rightarrow 2^a\,Componente$

Vector fijo: Todo par ordenado de puntos $\overrightarrow{AB}$.





Módulo de un vector: Es el valor numérico del vector. Es la distancia entre el origen y el extremo.

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ejemplo: Tomando como referencia los datos del ejemplo

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(6-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \approx 5{,}1$$

Dirección: Es la recta sobre la cual se mueve el vector.
Sentido: Es el de la flecha. (origen-Extremo)
Vector libre: Es el conjunto de todos los vectores fijos equipolentes entre si o conjunto de todos los vectores fijos con las mismas componentes.
Punto medio de un segmento: Es el punto que está a igual distancia de los extremos del segmento.

$$\text{PM} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Ejemplo:

Dado el Punto A=(1,3) y el Punto B=(6,2) $\text{PM} = \left(\frac{1+6}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

OPERACIONES CON VECTORES

SUMA DE DOS VECTORES LIBRES:

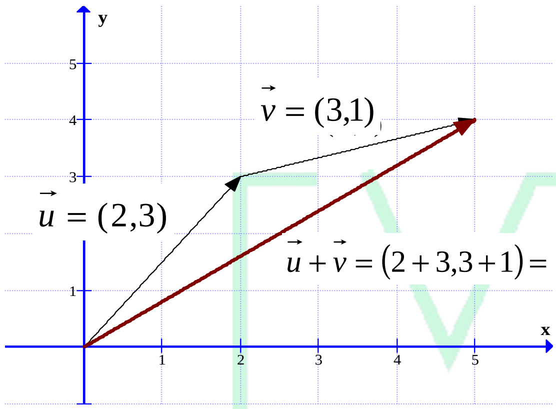
$\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

Esto originará un nuevo vector $\vec{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

Ejemplo:

$\vec{u} = (2,3)$ y $\vec{v} = (3,1)$: $\vec{u} + \vec{v} = (2+3, 3+1) = (5,4)$: $\vec{w} = (2+3, 3+1) = (5,4)$

Representación gráfica



DIFERENCIA DE DOS VECTORES LIBRES:

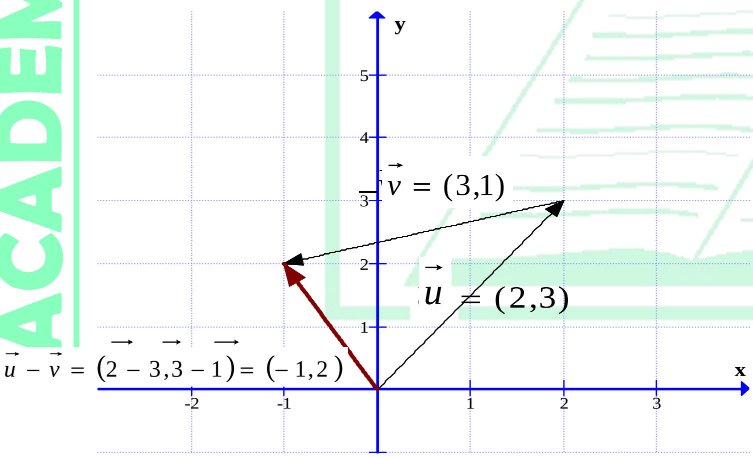
$\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$: $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Esto originará un nuevo vector $\vec{x} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Ejemplo:

$\vec{u} = (2,3)$ y $\vec{v} = (3,1)$: $\vec{u} - \vec{v} = (2-3, 3-1) = (-1,2)$

Representación gráfica:



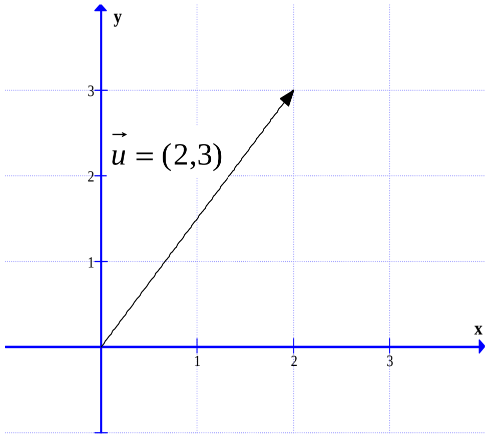
NOTA: Es el que resulta de sumar el primero con el opuesto del segundo

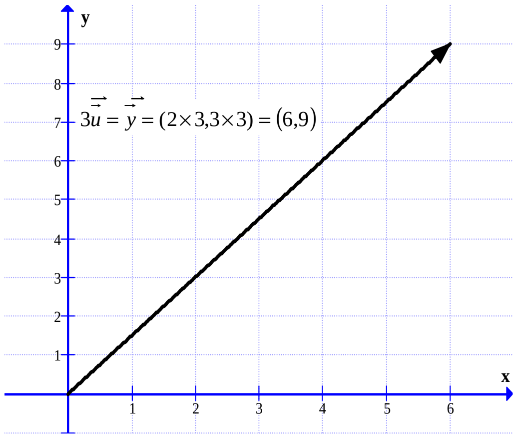
Producto de un número por un vector: k $\vec{u} = (ku_1, u_2)$

Ejemplo:

$\vec{u} = (2,3)$ k= 3 $3\vec{u} = \vec{y} = (2 \times 3, 3 \times 3) = (6,9)$

Representación gráfica





PRODUCTO DE DOS VECTORES

$\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2$

El producto escalar de dos vectores también se puede expresar como el módulo del primer vector por el módulo del segundo vector y por el coseno del ángulo que forman.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$

NOTA: En el caso de que el producto de dos vectores sea 0, los vectores son perpendiculares.

CARACTERÍSTICAS A TENER EN CUENTA DE LOS VECTORES

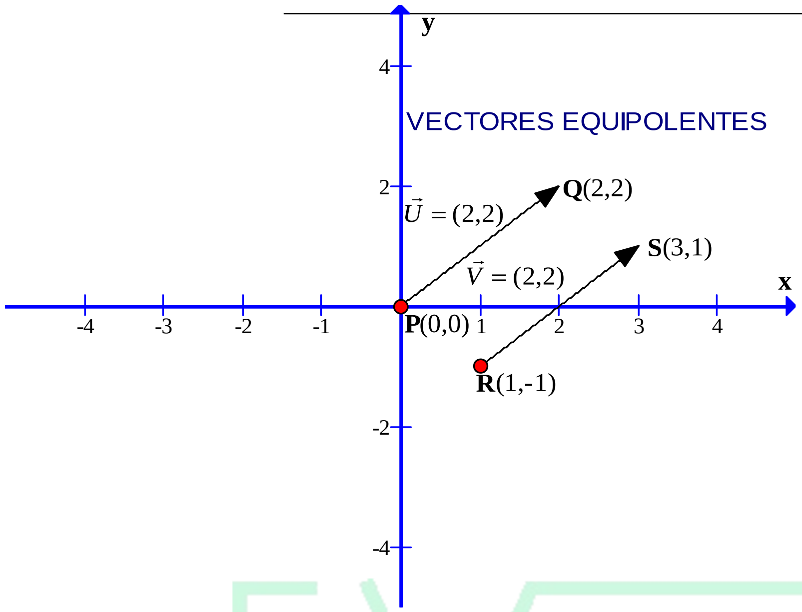
- Cuando un vector tiene como origen el punto (0,0) *(origen de coordenadas)* sus coordenadas coinciden con las del extremo.
- Un vector queda determinado si se conoce su módulo, su dirección y su sentido.
- Dos vectores tienen la misma dirección si están situados en la misma recta o en rectas paralelas.
- Para hallar un vector perpendicular a otro, se permutan las dos coordenadas y a solo una de ellas se les cambia el signo (el signo se puede cambiar indistintamente a cualquiera de las dos coordenadas).
- **Vectores equipolentes:** Son los que tiene el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Ejemplo de vectores equipolentes:

$$\left.\begin{array}{l} P(0,0) \\ Q(2,2) \end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = (2-0, 2-0) = (2,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} R(1,-1) \\ S(3,1) \end{array}\right\} \overrightarrow{RS} = (3-1, 1-(-1)) = (2,2)$$

A continuación los veremos en su representación gráfica



ECUACIONES DE LA RECTA

Vamos a hallar la **ecuación de la recta** a partir de un **vector y** un **punto** de la misma.
Partimos de la siguiente situación inicial:

- La recta pasa por un punto $P = (x_1, y_1)$
- tiene como vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$.
- $t \in \Re$ *(Números Reales)*

Ecuación vectorial → $\boxed{(x, y) = (x_1, y_1) + t(v_1, v_2)}$

NOTA: t es un parámetro que indica el número de veces que un vector unitario esta contenido en el vector director.

Ecuaciones paramétricas → $$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + tv_1 \\ y = y_1 + tv_2 \end{cases}}$$

Despejamos t en las dos ecuaciones e igualamos las expresiones obtenidas. Para obtener la ecuación continua.

Ecuación continua → $$\boxed{\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}}$$

Multiplicamos en cruz e igualamos a 0. Cambiamos v_2 por A y $-v_1$ por B, lo restante por C. Para obtener la ecuación de la recta en forma general o implícita.

$$v_2 \cdot (x - x_1) = v_1(y - y_1)$$

$$v_2 \cdot x - v_2 \cdot x_1 = v_1 \cdot y - v_1 \cdot y_1$$

$$\underbrace{v_2 \cdot x}_{A} - \underbrace{v_1 \cdot y}_{B} \underbrace{- v_2 \cdot x_1 + v_1 \cdot y_1}_{C} = 0$$

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \longrightarrow$$ **Ecuación General o implícita**

NOTA: para hallar el vector director de la recta partiendo de la ecuación general es (-B,A).

Despejamos y para obtener la ecuación de la recta en forma explícita.

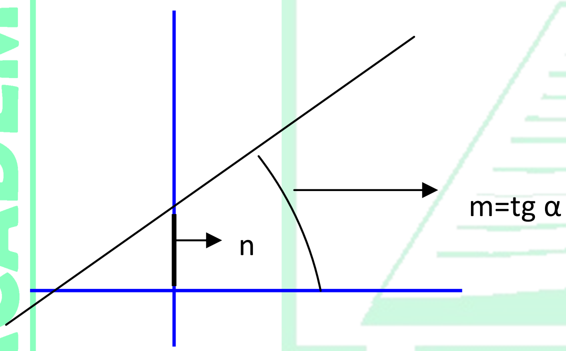
$$\boxed{Y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}}$$

Ecuación explícita

$$\boxed{Y = mx + n}$$

$$\begin{cases} m = \dfrac{-A}{B} \\ n = \dfrac{-C}{B} \end{cases}$$

La expresión más utilizada es la segunda donde **m** es la **pendiente** y **n** es la **ordenada en el origen.**



Ecuación Punto-Pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Si nos dan las rectas en forma explicita:

$$\left.\begin{array}{l} y=mx+n \\ y'=m'x+n' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l|l|l} -\text{sec antes}- & -\ paralelas\ - & -\ coincidentes \\ m\neq m' & m=m' & m=m';n=n' \end{array}\right.$$

Si nos dan las rectas en forma de ecuación general:

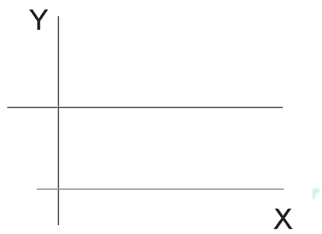
$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+C \\ A'x+B'y+C' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\| \begin{array}{l|l|l} -\text{sec antes}- & -\ paralelas\ - & -\ coincidentes \\ \dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{B}{B'} & \dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}\neq\dfrac{C}{C'} & \dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'} \end{array}\right.$$

FUNCIONES

DOMINIOS

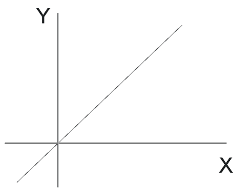
1. FUNCIONES POLINÓMICAS: El dominio son todos los reales
2. FUNCIONES RACIONALES: El dominio son todos los reales menos los valores que anulan el denominador
3. FUNCIONES IRRACIONALES: Son todos los valores que hacen el radicando positivo o cero
4. FUNCIONES LOGARÍTMICAS: Son todos los valores que hacen el logaritmo mayor que cero

FUNCION CONSTANTE $\boxed{y=k}$



a) Dom$f$ = $\mathbb{R}$
b) Imagen = k
c) Simetrías f(x) = f(-x) $\Rightarrow$ par

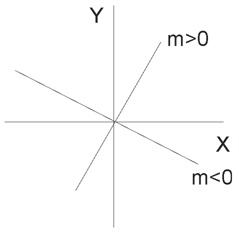
FUNCION IDENTIDAD $\boxed{y=x}$



Bisectriz del 1[er] y 3[er] cuadrante

a) Dom$f$ = $\mathbb{R}$
b) Imagen = $\mathbb{R}$
c) Simetrías: f(x) = -f(-x) $\Rightarrow$ impar
d) Crecimiento: crecimiento en todo el dom$f$

FUNCION DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA (F. LINEAL) $\boxed{y=mx}$



a) Dom$f$ = R
b) Imagen = $\mathbb{R}$
c) Simetrías: f(x) = -f(-x) $\Rightarrow$ impar
d) Monotonía $\begin{cases} m>0 \Rightarrow creciente\ \Re \\ m<0 \Rightarrow decreciente\ \Re \end{cases}$

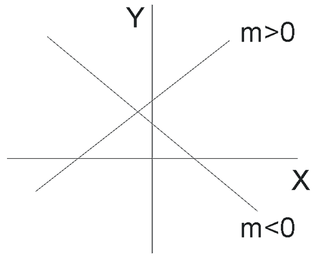
FUNCION AFIN $\boxed{y = mx + n}$

a) Dom$f$ = ℝ

b) f(D) = ℝ

c) Simetrías: no tiene

d) Crecimiento $\begin{cases} m > 0 \Rightarrow creciente\ \Re \\ m < 0 \Rightarrow decreciente\ \Re \end{cases}$



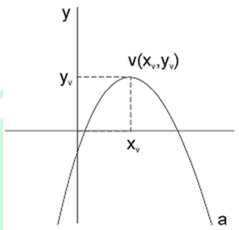
m $\Rightarrow$ pendiente
n $\Rightarrow$ ordenada en el origen

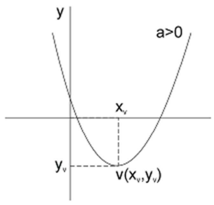
FUNCION CUADRÁTICA $\boxed{y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$

a) Dom$f$ = ℝ

b) $\begin{cases} a > 0 \Rightarrow f(D) = [y_v, +\infty) \\ a < 0 \Rightarrow f(D) = (-\infty, y_v] \end{cases}$

c) Crecimiento $\begin{cases} a > 0 \Rightarrow \begin{cases} creciente\ (x_v, +\infty) \\ decreciente\ (-\infty, x_v) \end{cases} \\ a < 0 \Rightarrow \begin{cases} creciente\ (-\infty, x_v) \\ decreciente\ (x_v, +\infty) \end{cases} \end{cases}$

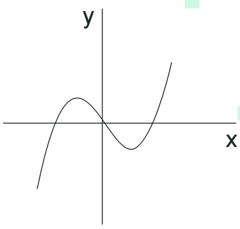




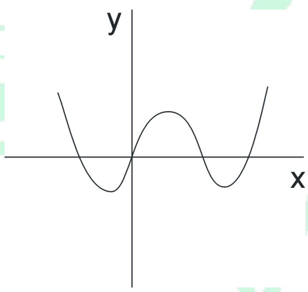
Vértice $\begin{cases} x_v = \dfrac{-b}{2a} \\ y_v = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c \end{cases}$

FUNCIONES POLINOMICAS $\boxed{y = a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + c \cdot x^{n-2} + ... + d}$

a) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$



$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$



FUNCION DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

$$\boxed{y = \frac{k}{x}}$$

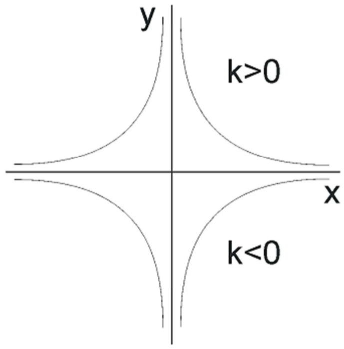
a) Dom$f$ = $\mathbb{R}$ - {0}

b) Imagen = $\mathbb{R}$ - {0}

c) Simetría f(x) = -f(-x) $\Rightarrow$ impar

d) Crecimiento

$$\begin{cases} k > 0 \Rightarrow \text{decreciente en D} \\ k < 0 \Rightarrow \text{creciente en D} \end{cases}$$



FUNCIONES RACIONALES

$$\boxed{y = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

Siendo P(x) y Q(x) polinomios. Ej.: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

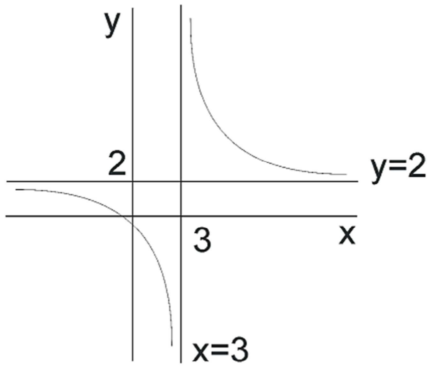
a) Dom$f$ = $\mathbb{R}$ - {valores de x que anulan al denominador}

Dom$f$ = {x$\in$ $\mathbb{R}$ / cx + d $\neq$ 0} = $\mathbb{R}$ - $\{-\dfrac{d}{c}\}$

b) Cortes con los ejes $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{eje}x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \\ \text{eje}y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d} \end{cases}$$

c) Asíntotas $\begin{cases} \text{horizontal} \Rightarrow y = \dfrac{a}{c} \\ \text{verticales} \Rightarrow x = \dfrac{-d}{c} \end{cases}$



Ejemplo

Vamos a representar $y = \dfrac{2x+1}{x+3}$

a) Dom$f$ = {x$\in$ $\mathbb{R}$ / x - 3 $\neq$ 0} = $\mathbb{R}$ - {3}

b) Cortes con los ejes $\Rightarrow \begin{cases} \text{eje}x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow P_1(-1/2, 0) \\ \text{eje}y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2 \cdot 0 + 1}{0 - 3} = \dfrac{-1}{3} \Rightarrow P_2(0, -1/3) \end{cases}$

c) Asíntotas $\begin{cases} \text{horizontal} \Rightarrow y = \dfrac{a}{c} = 2 \\ \text{verticales} \Rightarrow x = \dfrac{-d}{c} = 3 \end{cases}$

FUNCIONES EXPONENCIALES $\boxed{y = a^x}$

a) Dom$f$ = $\mathbb{R}$

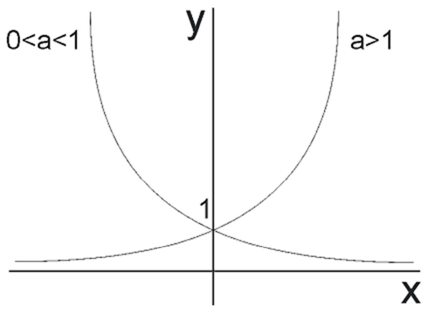
b) Recorrido = $(0,+\infty)$

c) Puntos de corte: (0,1)

d) Crecimiento

$$\begin{cases} a > 1 \Rightarrow \text{creciente en todo el dominio} \\ 0 < a < 1 \Rightarrow \text{decreciente en todo el dominio} \end{cases}$$

e) Asíntotas: y = 0 es una asíntota horizontal



FUNCIONES LOGARITMICAS $\boxed{y = \log_a x}$

a) Dom$f$ = $(0,+\infty)$

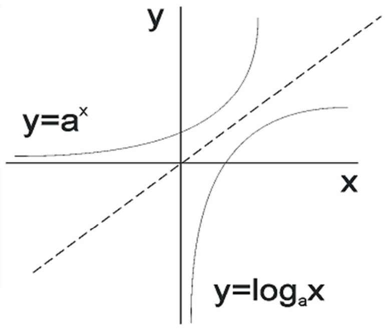
b) Recorrido = $\mathbb{R}$

c) Puntos de corte: (1,0) y (a,1)

d) Creciminiento

$$\begin{cases} a > 1 \Rightarrow \text{creciente en todo el dominio} \\ 0 < a < 1 \Rightarrow \text{decreciente en todo el dominio} \end{cases}$$

e) Asíntotas: x = 0 es una asíntota vertical



La función exponencial y la función logarítmica son funciones recíprocas. Son simétricas respecto a la bisectriz del 1er cuadrante

PROBABILIDAD

DEFINICIÓN DE LA PLACE

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables al suceso A}}{\text{nº de casos posibles}}$$

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

La probabilidad es una función que asigna a cada suceso A de E un número real P(A), que cumple los siguientes axiomas:

$$1^{\circ})\ 0 \le P(A) \le 1$$
$$2^{\circ})\ P(E) = 1$$
$$3^{\circ})\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{si } A \cap B = \varnothing \text{ (sucesos incompatibles)}$$

Consecuencias:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad \text{si } A \cap B \neq \varnothing \text{ (sucesos compatibles)}$$
$$P(A) \le P(B) \qquad \text{si } A \subset B$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

SUCESOS INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES

Dos sucesos A y B son independientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A no influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{o} \quad P(B/A) = P(B) \;\Rightarrow\; P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

Dos sucesos A y B son dependientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) \neq P(A) \quad \text{o} \quad P(B/A) \neq P(B) \;\Rightarrow\; P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B/A)$$

DIAGRAMA DE ÁRBOL

Si un primer experimento puede hacerse de n maneras diferentes y un segundo experimento puede hacerse de m maneras diferentes, los dos experimentos juntos pueden hacerse de n × m maneras diferentes.

El diagrama de árbol es una herramienta que nos facilita la aplicación de este principio (principio general del recuento).

Ejemplo: Una urna con 2 bolas rojas, y 3 azules. Se dispone también de un dado. Y se pide calcular las siguientes probabilidades:

a. Saber la probabilidad de sacar una bola roja y después un dos
b. Saber la probabilidad de sacar una bola roja y un número par.

Para ello construimos el diagrama de árbol. Aunque se podría hacer sin construir todo el diagrama, así se puede utilizar de guía para futuros ejercicios.

En este diagrama se trata de representar las diferentes opciones que tenemos, junto con la probabilidad de obtener cada una.

Bola roja $\frac{2}{5}$

1 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 1

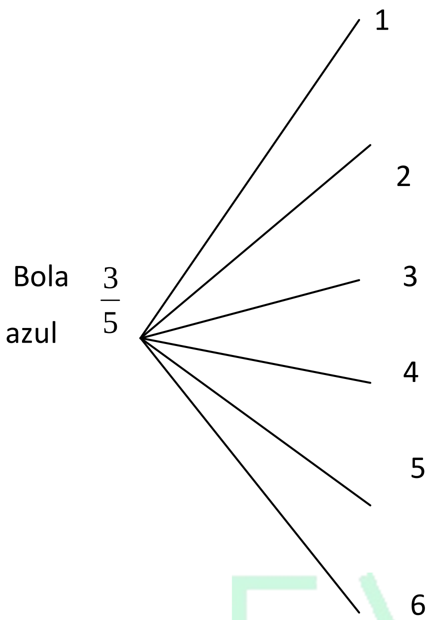
2 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 2

3 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 3

4 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 4

5 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 5

6 $\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{2}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 6



$\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 1

$\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 2

$\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 3

$\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 4

$\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 5

$\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow \frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ Probabilidad de sacar una bola roja y un 6

Apartado a. Esta probabilidad ya la da el diagrama de árbol directamente y es $\frac{1}{15}$

Apartado b. En este caso tenemos que sumar las probabilidades de sacar un 2 un 4 y un 6.

$\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$ Es la probabilidad de sacar una bola roja y un número par.

TABLA DE CONTINGENCIA

	A	$\overline{A}$	$TOTAL$
B	$P(A\cap B)$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
$TOTAL$	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS

Familia de sucesos $A_1, A_2,\dots,A_n$ de sucesos de S que cumplen:

a) Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \varnothing$

b) La unión de todos ellos es el suceso seguro $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sea $A_1, A_2,\dots,A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la **probabilidad del suceso B** viene dada por la expresión :

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+\dots+P(A_N)P(B/A_N)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B/A_i)$$

ESTADÍSTICA

MEDIDAS DE DISTRIBUCIÓN CENTRAL (MEDIA, MEDIANA Y MODA)

MEDIA:

Es la medida de posición central más utilizada, la más conocida y la más sencilla de calcular, debido principalmente a que sus ecuaciones se prestan para el manejo algebraico, lo cual la hace de gran utilidad. Su principal desventaja radica en su sensibilidad al cambio de uno de sus valores o a los valores extremos demasiado grandes o pequeños. La media se define como la suma de todos los valores observados, dividido por el número total de observaciones.

$$\boxed{\text{Media aritmética} = \frac{\textit{Suma} \text{ de todos los valores observados}}{\text{Número total de observaciones}}}$$

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum X_i \times f_i}{N}}$$

MEDIANA:

Con esta medida podemos identificar el valor que se encuentra en el centro de los datos, es decir, nos permite conocer el valor que se encuentra exactamente en la mitad del conjunto de datos, después que las observaciones estén ubicadas en una serie ordenada. Esta medida nos indica, que la mitad de los datos se encuentran por debajo de este valor y la otra mitad por encima del mismo. Para determinar la posición de la mediana se utiliza la fórmula.

$$\boxed{\text{Posición de la mediana} = \frac{N+1}{2}}$$

MODA:

La medida modal nos indica el valor que más veces se repite dentro de los datos.

MEDIDAS DE POSICIÓN: CUANTILES

Los cuantiles son valores de la distribución que la dividen en partes iguales, es decir, en intervalos, que comprenden el mismo número de valores. Los más usados son los cuartiles, los deciles y los percentiles.

- **PERCENTILES:** son 99 valores que dividen en cien partes iguales el conjunto de datos ordenados. Ejemplo, el percentil de orden 15 deja por debajo al 15% de las observaciones, y por encima queda el 85% de ellas.
- **CUARTILES:** son los tres valores que dividen al conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales, son un caso particular de los percentiles:

  - El primer cuartil Q 1 es el menor valor que es mayor que una cuarta parte de los datos (N/4)
  - El segundo cuartil Q 2 (la mediana), es el menor valor que es mayor que la mitad de los datos (2N/4).

- El tercer cuartil Q 3 es el menor valor que es mayor que tres cuartas partes de los datos (3N/4).

- **DECILES:** son los nueve valores que dividen al conjunto de datos ordenados en diez partes iguales, son también un caso particular de los percentiles.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN ABSOLUTAS

VARIANZA:

(s^2): Es el promedio del cuadrado de las distancias entre cada observación y la media aritmética del conjunto de observaciones.

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum x_i^2 \times f_i}{N} - \overline{x}^2}$$

DESVIACIÓN TÍPICA:

(s): La varianza viene dada por las mismas unidades que la variable pero al cuadrado, para evitar este problema podemos usar como medida de dispersión la desviación típica que se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$\boxed{s = \sqrt{s^2}}$$

RECORRIDO O RANGO DE UNA MUESTRA:

(R_e). Es la diferencia entre el valor de las observaciones mayor y el menor. $R_e = x_{max} - x_{min}$

MEDIDAS DE DISPERSIÓN RELATIVAS

COEFICIENTE DE VARIACIÓN DE PEARSON:

Cuando se quiere comparar el grado de dispersión de dos distribuciones que no vienen dadas en las mismas unidades o que las medias no son iguales se utiliza el coeficiente de variación de Pearson que se define como el cociente entre la desviación típica y el valor absoluto de la media aritmética.

$$\boxed{\mathrm{CV} = \frac{s}{\overline{x}}}$$

CV representa el número de veces que la desviación típica contiene a la media aritmética y por lo tanto cuanto mayor es CV mayor es la dispersión y menor la representatividad de la media.