MATEMÁTICAS
3º ESO

$f(x)$

ACADEMIA TAMARGO, S.L.U.

SÍGUENOS EN:

facebook

LinkedIn

twitter

ACADEMIA TAMARGO, S.L.U.

Índice de contenidos

CONTENIDO

NÚMEROS RACIONALES

Razón- Razón de dos números es el cociente indicado de ambos.
Se compone de dos términos "a" y "b" de los cuales "a" es el numerador y "b" es el denominador.

Razón de a y b, $\left(\frac{a}{b}\right)$.

NOTA: El numerador de una fracción representa el número de partes congruentes que se han considerado después de dividir la unidad en tantas partes iguales como indica el denominador.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS RAZONES EQUIVALENTES

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\times d=b\times c$ (*se multiplica en cruz*) Ejemplo: $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}\Rightarrow 3\times 4=6\times 2$

NOTA: Que dos fracciones sean equivalentes, nos indica, que los resultados de las mismas son idénticos.

OPERACIONES CON FRACCIONES

SUMA/RESTA DE DOS O MAS FRACCIONES.

Para explicarlo vamos a utilizar un ejemplo:

Ejemplo: $\frac{1}{5}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$

1) Hacemos mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\left.\begin{array}{l} 6=2\times 3 \\ 4=2\times 2=2^2 \\ 5=5 \end{array}\right\} \text{m.c.m. } = 2^2\times 3\times 5=60$$

Escribimos el m.c.m. como denominador común a todas las fracciones. Y dividimos el m.c.m. por el denominador y multiplicamos por el numerador inicial de cada fracción.

En nuestro ejemplo.
60 : 5 = 12
60 : 4 =15
60 : 6 = 10

$$\frac{12\times 1+15\times 3-10\times 5}{60}=\text{Operamos}=\frac{12+45-50}{60}=\frac{7}{60}$$

MULTIPLICACIONES DE FRACCIONES.

Como en el punto anterior lo vamos a explicar mediante un ejemplo:

Ejemplo: $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$

Multiplicamos los numeradores de cada fracción entre sí, obteniendo el numerador de la fracción resultado. A continuación multiplicamos los denominadores entre sí y nos da el denominador de la fracción resultado.

$$\frac{2\times 4\times 1}{3\times 5\times 2}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

NOTA: La fracción resultado, siempre se simplifica todo lo que sea posible.

DIVISIONES DE FRACCIONES.

Ejemplo: $\frac{1}{3} : \frac{2}{5}$

Multiplicas en cruz. Empiezas por el numerador de la primera fracción multiplicas por el denominador de la segunda fracción y el resultado es el numeradorde la fracción resultado. Después multiplicas el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda y el resultado es el denominador de la fracción resultado.

$$\frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{1\times 5}{3\times 2} = \frac{5}{6}$$

POTENCIAS

Potencia de un número: Muestra cuantas veces se usa el número en una multiplicación. Donde al número se le llama base y a las veces que se repite exponente.

Ejemplo: 2^3 = 2x2x2 (la base es 2 y el exponente 3).

CONSIDERACIONES SOBRE LAS POTENCIAS

1) Toda potencia de exponente 1 es igual a la base.
   Ejemplo : $a^1 = a$; 3^1=3

2) Toda potencia de exponente 0, es igual a la unidad.
   Ejemplo: $a^0 = 1$; 3°=1

3) Toda potencia de base uno es igual a la unidad.
   Ejemplo: 1^3 =1x1x1=1

4) Para obtener potencias de base 10, se escribe la unidad seguida de tantos ceros, como unidades tiene el exponente.

   Ejemplo: 10^3=1000

5) Al elevar los dos miembros de una igualdad a una potencia, resulta otra igualdad.
   $a = b \Rightarrow a^3 = b^3$

OPERACIONES CON POTENCIAS

1. **El producto de potencias de igual base**, es otra potencia que tiene la misma base y como exponente, la suma de los exponentes.

   $a^m \times a^n = a^{m+n}$ Ejemplo: $3^2 \times 3^3 = 3^5$

2. **El cociente de potencias de la misma base**, es otra potencia que tiene la misma base, y como exponente, la diferencia de los exponentes.

   $a^m : a^n = a^{m-n}$ Ejemplo: $3^3 : 3^2 = 3^{3-2} = 3^1 = 3$

3. **El producto de potencias del mismo exponente**, es otra potencia que tiene el mismo exponente y, como base, el producto de las bases.

   $a^m \times b^m \times c^m = (a \times b \times c)^m$ Ejemplo: $2^3 \times 3^3 \times 10^3 = 60^3$

4. **El cociente de potencias del mismo exponente**, es otra potencia que tiene el mismo exponente y como base, el cociente de las bases.
   $a^m : b^m = (a/b)^m$ Ejemplo: $12^3 : 3^3 = 4^3$

5. **La potencia de una potencia**, es otra potencia que tiene la misma base y como exponente el producto de los exponentes.
   $(a^m)^n = a^{m \times n}$ Ejemplo: $(3^3)^2 = 3^6$

RADICALES

Los radicales son expresiones de la forma:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ $\sqrt[3]{2^2} = 2^{2/3}$

RADICALES EQUIVALENTES

Si se multiplica o divide el índice y el exponente de un radical por un mismo número natural, se obtiene otro radical equivalente.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k.n]{a^{m.k}} \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n/k]{a^{m/k}}$$

REDUCIR RADICALES A ÍNDICE COMÚN

Vamos a explicarlo mediante un ejemplo.

$$\sqrt{2}\ ;\ \sqrt[3]{2^2};\ \sqrt[4]{3^3}$$

Hallamos el m.c.m. de los índices de las raíces, obteniendo el índice común.
m.c.m. (2, 3, 4) = 12

Seguidamente dividimos el índice común por cada uno de los índices de las raíces. Y multiplicamos el resultado obtenido por el exponente del radicando

$\sqrt[12]{2^6}\ ;\ \sqrt[12]{2^8}\ ;\ \sqrt[12]{3^9}$

EXTRAER FACTORES DEL RADICAL

Para extraer factores se descompone el radicando en factores. Si:

- Un exponente es menor que el índice, el factor correspondiente se deja en el radicando.
  $\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3}$

- Un exponente es igual al índice, el factor correspondiente sale fuera del radicando
  $\sqrt[4]{2^4} = 2$

- Un exponente es mayor que el índice, se divide dicho exponente por el índice. El coeficiente obtenido es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando.

$$\sqrt{96} = \sqrt{2^5\ x\ 3} = 2^2\sqrt{2\ x\ 3} = 2^2\sqrt{6}$$

$$\begin{array}{c|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Exponente del factor fuera del radical

Exponente del factor dentro del radical

INTRODUCIR FACTORES EN EL RADICAL

Para introducir factores en el radical, los elevamos al índice correspondiente.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \, x \, b}$$

Ejemplos: $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$ $\mathbf{5^3\sqrt{3} = \sqrt{5^{2\cdot 3} \cdot 3} = \sqrt{46875}}$

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Solamente pueden sumarse o restarse dos radicales cuando son radicales semejantes, es decir, si son radicales del mismo índice e igual radicando.

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} = (a+b)\sqrt[n]{k}$$

$$3\sqrt[4]{5} + 6\sqrt[4]{5} = 9\sqrt[4]{5}$$

Si el radicando es distinto se descompone en factores y se extraen los factores que se puedan de la raíz y luego sumamos o restamos los que tengan el mismo radicando.

$$5\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{75} \to 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2^2 \, x \, 3} - \sqrt{5^2 \, x \, 3} \to 5\sqrt{3} + 3 \, x \, 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \to$$
$$\to \cancel{5\sqrt{3}} + 6\sqrt{3} - \cancel{5\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RADICALES

Para multiplicar o dividir radicales hay que tener en cuenta si son del mismo índice o diferente. En el caso de las multiplicaciones, si tienen el mismo índice, se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\sqrt[n]{a} \, . \, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \, . \, b}$$
$$\sqrt[3]{2} \, . \, \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$$

Si las raíces son de distinto índice se reducen a índice común y luego operamos.

$$\sqrt{3} \, . \, \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \, . \, \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \, . \, 2^2}$$

En el caso de la división, si tienen el mismo índice, se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \to Ejemplo \to \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

Si por el contrario, las raíces son de distinto índice, se deben reducir a índice común y posteriormente dividir los radicandos.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{2^2}}$$

POTENCIAS Y RAÍCES DE RADICALES

Cuando tenemos un radical elevado a una potencia, se eleva el radicando a esa potencia y se deja el mismo índice.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^7 = \sqrt[3]{5^7} = 5^2 \cdot \sqrt[3]{5}$$

La raíz de un radical es otra raíz de igual radicando y cuyo índice el producto de los dos índices.

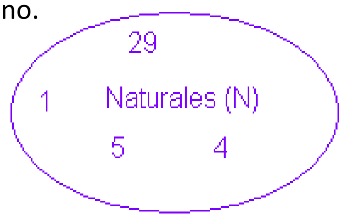
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$$

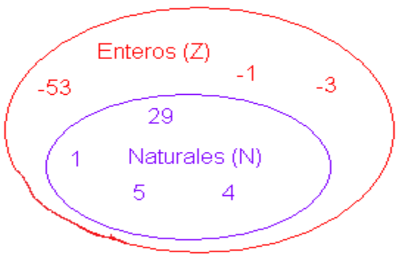
NÚMEROS REALES

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

Números Naturales(N): Son los que permiten contar los elementos de un conjunto.
Con ellos podemos contar los elementos de un conjunto, expresar la posición u orden de un elemento e identificar y diferenciar los diferentes elementos del conjunto. Dependiendo de los autores el 0 se puede considerar natural o no.



Números Enteros (Z): Contiene a los números naturales a sus opuestos y al cero.



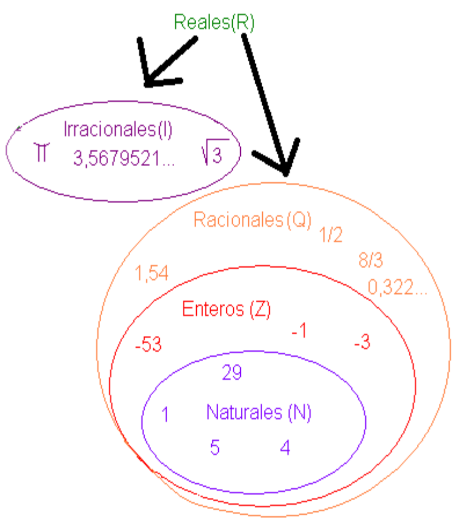
Números Irracionales: son aquellos que se escriben mediante una expresión decimal con infinitas cifras, no periódicas. Dicho conjunto lo denotamos por "I".

Ejemplo: $\pi, \sqrt{2}, \quad 78{,}9673645\,1728...$

Número Racional: es el que se puede expresar como cociente de dos números enteros. El término "racional" hace referencia a una "ración" o parte de un todo; el conjunto de los números racionales se designan con "Q" por "quotient" que significa "cociente" en varios idiomas europeos. El conjunto Q de los números racionales está compuesto por los números enteros y por los fraccionarios.

Ejemplo: $\frac{3}{2}, \frac{5}{9}....$

Llamaremos Número real a un número que puede ser racional (Q)(números que pueden expresarse como fracción) o irracional (I)(números que no pueden expresarse como cociente exacto de dos números enteros). Por consiguiente, el conjunto de los números reales es la unión del conjunto de números racionales y el conjunto de números irracionales.



- El conjunto de los números reales es el conjunto de todos los números que corresponden a los puntos de la recta.

- Al conjunto de los números reales es el conjunto de todos los números que pueden expresarse con decimales infinitos periódicos o no periódicos. El conjunto de los números reales es denotado por R.

Nota: En la figura anterior vemos como cada grupo engloba al anterior. Menos en el caso de los números Irracionales.
Ejemplo: El número 5 es natural (N), Entero (Z), Racional (Q) y Real(R)

JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

1. **Paréntesisde los interiores a los exteriores**
2. **Potenciación y radicaciónsegúnencontremos de izquierda a derecha.**
3. **Multiplicación y divisiónsegúnencontremos de izquierda a derecha**
4. **Sumas y restas.**

APROXIMACIONES y ERRORES

Aproximarun número a ciertas cifras decimales: Consiste en encontrar un número con las cifras pedidas, que esté muy próximo al número dado.

1. **Aproximación pordefecto**, buscamos el número con un determinado número de cifras que es inmediatamente menor que el dado.
2. **Aproximación porexceso**, es el número con las cifras decimales fijadas inmediatamente mayor al dado.Por ejemplo, dado el número 2.7456 vamos a aproximarlo con dos cifras decimales:
   a) por defecto es 2.74
   b) por exceso es 2.75
   Al dar la aproximación en lugar del número se comete un error, en el ejemplo anterior los errores que se cometen son:
   a) $| 2.7456 - 2.74 | = 0.0056$
   b) $| 2.7456 - 2.75 | = 0.0044$
3. **Redondear** un número consiste en dar la mejor de las aproximaciones, es decir, aquella con la que se comente un error menor, en nuestro caso si redondeamos 2.7456 a dos cifras decimales, el redondeo será 2.75. Porque la siguiente cifra a la que hacemos la aproximación es mayor o igual que 5.O por ejemplo si fuera 2.742 el redondeo sería 2,74.Porque la siguiente cifra a la que queremos hacer la aproximación es menor que 5.

En la siguiente tabla tenemos casos de aproximaciones y redondeo

Número	Expresión decimal	Aproximación por defecto	Aproximación por exceso	Redondeo
2/3	**0,666666666**	**0,66(dos cifras decimales)**	**0,67(dos cifras decimales)**	**0,67(dos cifras decimales)**
4/3	**1,333333333**	**1,33(dos cifras decimales)**	**1,34(dos cifras decimales)**	**1,33(dos cifras deicmales)**
	23,45278394	**23,4(una cifra decimal)**	**23,5(una cifra decimal)**	**23,5(una cifra decimal)**

ERROR ABSOLUTO $E_a = |V_r - V_{ap}| \begin{cases} E_a = \text{Error absoluto} \\ V_r = \text{Valor real} \\ V_{ap} = \text{Valor aproximado} \end{cases}$

ERROR RELATIVO $E_r = \dfrac{E_a}{V_r} \begin{cases} E_r = \text{Error relativo} \\ E_a = \text{Error absoluto} \\ V_r = \text{Valor real} \end{cases}$

NOTA: La cota de error de un redondeo de orden n es media unidad de ese orden.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Notación científica: es un modo conciso de representar un número utilizando potencias de base diez. Esta notación se utiliza para poder expresar fácilmente números muy grandes o muy pequeños.

Los números se escriben como un producto: $\boxed{a \times 10^n}$

Siendo:

a: un número entero o decimal mayor o igual que 1 y menor que 10, que recibe el nombre de **mantisa**.

n: un número entero, que recibe el nombre de **exponente** u **orden de magnitud**.

Ejemplo: 254 000 000 000 $= 2{,}54 \times 10^{11}$

ESCRITURA

- $10^0 = 1$
- $10^1 = 10$
- $10^2 = 100$

10 elevado a una potencia entera negativa $-n$ es igual a $1/10^n$:

- $10^{-1} = 1/10 = 0{,}1$
- $10^{-3} = 1/1\,000 = 0{,}001$
- $10^{-9} = 1/1\,000\,000\,000 = 0{,}000\,000\,001$

Por tanto, un número como: 156 234 000 000 000 000 000 000 000 000 puede ser escrito como $1{,}56234 \times 10^{29}$,y un número pequeño como 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 939 kg *(masa de un electrón)* puede ser escrito como 9.10939×10^{-31}kg.

OPERACIONES NOTACIÓN CIENTÍFICA

SUMA Y RESTA

Siempre que las potencias de 10 tengan el mismo exponente, se debe sumar las mantisas, dejando la potencia de 10 con el mismo grado. Si no tienen el mismo exponente, debe convertirse la mantisa multiplicándola o dividiéndola por 10 tantas veces como sea necesario para obtener el mismo exponente:

Ejemplo-1:

$1 \times 10^4 + 3 \times 10^4 = 10^4 x(1+3) = 4 \times 10^4$

$2 \times 10^5 + 3 \times 10^5 = 5 \times 10^5$

$0.2 \times 10^5 + 3 \times 10^5 = 3.2 \times 10^5$

Ejemplo-2:
$2 \times 10^4 + 3 \times 10^5 - 6 \times 10^3$=(tomamos el exponente 5 como referencia)
$= 0{,}2 \times 10^5 + 3 \times 10^5 - 0{,}06 \times 10^5 = 3{,}14 \times 10^5$

MULTIPLICACIÓN
Para multiplicar cantidades escritas en notación científica se multiplican las mantisas y se suman los exponentes algebraicamente.
Ejemplo: $(4\times10^{12})\times(2\times10^5) = 4 \times 2\ 10^{12+5} = 8\times10^{17}$

DIVISIÓN
Para dividir cantidades escritas en notación científica se dividen las mantisas y se restan los exponentes (el del numerador menos el del denominador).
Ejemplo: $(4\times10^{12}) : (2\times10^5) = 4/2\ 10^{12-5} = 2\times10^7$

POTENCIACIÓN
Se eleva la mantisa a la potencia y se multiplican los exponentes.

Ejemplo: $(3\times10^6)^2 = 3^2\ 10^{6\times2} = 9\times10^{12}$

RADICACIÓN
Se debe extraer la raíz de la mantisa y se divide el exponente por el índice de la raíz.
Ejemplos:

$$\sqrt{9\cdot10^{26}} = 3\cdot10^{13}$$
$$\sqrt[3]{27\cdot10^{12}} = 3\cdot10^{4}$$
$$\sqrt[4]{256\cdot10^{64}} = 4\cdot10^{16}$$

CALCULO DE FRACCIONES GENERATRICES

Un número decimal exacto periódico puede expresarse en forma de fracción, llamada fracción generatriz, de las formas que indicamos:

DECIMALES EXACTOS

La fracción generatriz de un decimal exacto: es una fracción que tiene por numerador el número escrito sin coma decimal y por denominador un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tiene. Ejemplos: $0,25 = \frac{25}{100}; 3,245 = \frac{3245}{1000}$

DECIMALES PERIÓDICOS PUROS

Lo vamos a explicar con un ejemplo:
Consideramos al decimal $4,\widehat{31}$= 4,31313131..., al que llamaremos x. x= 4,3131313131...

Si multiplicamos los dos miembros por 100 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene el período) obtenemos:
100x = 431,31313131...

Restando miembro a miembro las dos igualdades:

$$\begin{array}{rl} 100x = & 431'\cancel{313131}\ldots \\ -\quad x = & 4'\cancel{313131}\ldots \\ \hline 99x = & 431 - 4 \end{array} \qquad x=\frac{427}{99}$$

La fracción generatriz de un decimal periódico puro: es una fracción que tiene por numerador al propio número, escrito sin los signos coma y periodo, menos el número formado por las cifras anteriores a la coma. Y por denominador, tiene tantos nueves como cifras decimales hay en el periodo.
También podemos hallar la fracción generatriz por la anterior definición.
Ejemplo, según definición:

$4,\widehat{31}=\frac{431-4}{99}=\frac{427}{99}$

DECIMALES PERIÓDICOS MIXTOS

Consideramos el decimal $1,0\widehat{63}$ al que llamamos x:
X= 1,06363636363…

Si multiplicamos los dos miembros por 10 (un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales haya antes del periodo) obtenemos el decimal periódico puro:
10x= 10,63636363…

Multiplicamos los dos miembros de la igualdad obtenida por 100 (un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el periodo) y obtenemos:
1000x= 1063,63636363…

Restando las dos últimas igualdades:

$$\begin{array}{rl} 1000x = & 1063'636363\ldots \\ 10x = & 10'\cancel{636363}\ldots \\ \hline 990x = & 1063 - 10 \end{array} \qquad x=\frac{1953}{990}$$

La fracción generatriz de un decimal periódico mixto: Es una fracción que tiene como numerador el propio número escrito sin coma, menos la parte no periódica dividido por tantos nueves como cifras tenga el periodo, y tantos ceros como la parte decimal no periódica.

Al igual que en los números periódicos puros, podemos hallar la fracción según definición.
Ejemplo:

$3,2\widehat{75} = \frac{3275-32}{990}=\frac{3243}{990}$

POLINOMIOS

MONOMIO:es un producto un número por una o varias letras. El número se llama coeficiente y las letras parte literal.
Ej. $3x$
GRADO DE UN MONOMIO: es la suma de los exponentes de las letras. Los números sin parte literal son monomios de grado 0
MONOMIOS SEMEJANTES: son los que tienen idéntica la parte literal.
Ej. $2x^2$ y $3x^2$

SUMA Y RESTA DE MONOMIOS SEMEJANTES: se suman (restan) los coeficientes.

Ej. $2x^2+3x+5-3x^2+5x-1=2x^2-3x^2+3x+5x+5-1=-x^2+8x+4$

PRODUCTO (DIVISIÓN) DE MONOMIOS: se multiplican (dividen) los coeficientes y la parte literal (fórmulas de potencias).

Ej. $\dfrac{8x^5}{4x^2}=2x^{5-2}=2x^3$

POLINOMIO: es una suma de monomios.

Ej. $3x^3-2x+7$

POLINOMIO COMPLETO: es el que tiene todos los monomios desde el de mayor grado hasta el término independiente.

GRADO DE UN POLINOMIO: es el grado del monomio de mayor grado. Al coeficiente del monomio que nos dice el grado del polinomio se llama coeficiente principal., el coeficiente del polinomio de grado cero se llama término independiente.

Ej. $3x^3\cdot y^2+5x^3\cdot y-2x^2-5y^2$ El grado de este polinomio es 5

NOTA: Para obtener el valor del grado de los diferentes monomios, se suman todos los exponentes de las diferentes letras que existan en cada monomio. A continuación para obtener el grado del polinomio se comparan esas sumas y se busca la mayor, obteniéndose el grado del polinomio.

SUMA DE POLINOMIOS: se colocan uno a continuación del otro y se suman los monomios semejantes.

Ej. $(x^2-2x+5)+(3x^2-1)=4x^2-2x+4$

RESTA DE POLINOMIOS: se le suma al polinomio minuendo el polinomio sustraendo con todos los signos cambiados.

Ej. $(x^2-2x+5)-(3x^2-1)=-2x^2-2x+6$

PRODUCTO DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO: se multiplica el monomio por cada uno de los monomios del polinomio y se suman los monomios resultantes.

Ej. $3\cdot(2x^3-3x)=6x^3-9x$

PRODUCTO DE POLINOMIOS $P(x)\cdot Q(x)$**:** Es la suma del producto de cada uno de los monomios del polinomio $P(x)$ por cada uno de los monomios de $Q(x)$.

Ej. $(x+2)\cdot(2x^2-3x+5)=2x^3-3x^2+5x+4x^2-6x+10=2x^3+x^2-x+10$

VALOR NUMÉRICO DEL POLINOMIO PARA $x=a$**:** es el número que resulta de sustituir la x por a en el polinomio. Si el valor numérico del polinomio resulta cero se dice que a es una raíz del polinomio.

Ej. $-3x^2+2x-1=-3\cdot 2^2+2\cdot 2-1=-12+4-1=-9$

PRODUCTOS O IDENTIDADES NOTABLES

El cuadrado de la suma de dos números, es igual al cuadrado del primero, más el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$\boxed{(a+b)^2=(-a-b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

Ejemplo-1:

$$(3+4)^2=3^2+2\cdot 3\cdot 4+4^2=9+24+16=49$$

$$\textit{como}\text{ se puede observar es lo mismo que } (3+4)^2=7^2=49$$

Ejemplo-2:

$$(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

El cuadrado de la diferencia de dos números, es igual al cuadrado del primero, menos el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$\boxed{(a-b)^2 = (-a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Ejemplo-1:

$$(5-3)^2 = 5^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 5 = 25 + 9 - 30 = 4$$

$$\text{como se puede observar es lo mismo que } (5-3)^2 = 2^2 = 4$$

Ejemplo-2:

$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 2\cdot 3x\cdot 5 + 25 = 9x^2 - 30x + 25$

La diferencia de los cuadrados de dos números, es igual al producto de la suma por la diferencia de los dos números.

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\times(a-b)}$$

Ejemplo: $9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2)$

ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

ECUACIONES

ECUACIÓN: es la igualdad de dos expresiones algebraicas no equivalentes.

Ejemplos: $2x+3 = x-2$

$x^2-5x = 2x-1$

ECUACIONES EQUIVALENTES: son aquellas que tienen las mismas soluciones.

GRADO DE UNA ECUACIÓN: En una ecuación de una sola incógnita, se llama grado de la ecuación al valor del mayor exponente con que figura la incógnita.

ECUACIONES COMPATIBLES: son aquellas que pueden resolverse, existiendo uno o varios valores de la incógnita o incógnitas que las satisfacen.

ECUACIONES INCOMPATIBLES: son aquellas que no tienen solución.

RESOLUCIÓN ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Regla de la suma: Si a los 2 miembros de una ecuación se le suma o resta el mismo número o la misma expresión a ambos lados de la igualdad la ecuación no varía.

Regla del producto: Si multiplicamos y dividimos los 2 miembros por un número distinto de 0, obtenemos una ecuación equivalente.

1) Operamos términos semejantes.
2) Términos con x a un lado de la igualdad y término independientes al otro. Los elementos que están sumando pasan restando y viceversa.
3) Operamos para dejar la incógnita sola, a un lado de la igualdad.

$$3x + 2 - x = 2x + 8 - 6 - 5x - 10$$
$$2x + 2 = -3x - 8$$
$$2x + 3x = -8 - 2$$
$$5x = -10;$$
$$x = \frac{-10}{5}$$
$$x = -2$$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CONDENOMINADORES.

$$\frac{3x+1}{2}-\frac{x-1}{3}+2=27$$

$$m.c.m=6$$

$$\frac{3(3x+1)}{6}-\frac{2(x-1)}{6}+\frac{12}{6}=\frac{162}{6};$$

$$3(3x+1)-2(x-1)+12=162$$

$$9x+3-2x+2+12=162$$

$$7x+17=162$$

$$7x=145 \Rightarrow x=\frac{145}{7} \Rightarrow x=20,71$$

1) hallamos el m.c.m. de los denominadores

2) dividimos el m.c.m. entre el denominador de cada fracción y lo multiplicamos por el numerador.

3) A partir de este momento ya se resuelve como una ecuación siguiendo los pasos anteriores.

NOTA: Un número o signo delante de un paréntesis, afecta a todo el paréntesis.

Sol.: $\boxed{x=20,71}$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA

Ecuación de segundo grado con una incógnita es aquella que, una vez realizadas todas las transformaciones y reducciones posibles queda de la forma: $ax^2+bx+c=0$. Pudiendo ser nulo algún término o incluso dos, menos el de x^2.

TIPOS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Para resolver las ecuaciones de segundo grado, utilizamos diferentes métodos según sea el tipo.

COMPLETAS

Como su propio nombre indica son aquellas que tienen todos los términos de la ecuación y son de la forma: $\boxed{ax^2+bx+c=0}$

Para resolverla se utiliza la siguiente fórmula: $\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

Ejemplo: $x^2-5x+6=0$ para la fórmula utilizamos los coeficientes $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=6 \end{cases}$

NOTA: Os aconsejamos, definir claramente los coeficientes sobre todo al principio para evitar posibles errores.

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}= \begin{cases} =\frac{5+1}{2}=3 \\ =\frac{5-1}{2}=2 \end{cases}$$

$$Soluciones \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=3 \end{cases}$$

INCOMPLETAS

- Si b=0

La ecuación es del tipo $ax^2+c=0$. Es decir, tiene término en x^2 y término independiente.

Este tipo se resuelve:

$$ax^2 - c = 0 \rightarrow ax^2 = c \rightarrow x^2 = \frac{c}{a} \rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}}$$

Ejemplo:

$$-3x^2 + 27 = 0$$
$$-3x^2 = -27$$
$$3x^2 = 27$$
$$x^2 = \frac{27}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$$

+3

-3

NOTA: recordemos que delante de la raíz siempre hay un signo más y uno menos.

- Si c=0

La ecuación es del tipo $ax^2+bx=0$. Es decir, tiene término en x^2 y término en x.

1. Se saca factor común a la x $x \cdot (ax + b) = 0$
2. Se iguala miembro a miembro a 0

$$\boxed{x = 0} \quad \boxed{ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{a}}$$

Ejemplo:

$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0$$
$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$Soluciones \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

SISTEMAS DE ECUACIONES: son conjuntos de ecuaciones que deben verificarse para unos mismos valores de incógnitas

Ejemplo:
$$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ 2x + 5y = 3 \end{array}\right\}$$

Aunque la parte más relevante es la resolución. Se deben tener claros una serie de conceptos.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es una expresión formada por dos ecuaciones lineales, de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

Cada par de valores (x,y) que satisfacen cada una de las ecuaciones es la solución del sistema de ecuaciones. Cada una de las ecuaciones se representa por una recta en el plano.

Dependiendo del número de soluciones los sistemas se pueden clasificar en:

- **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (SCD),** tiene solución única (x,y). Gráficamente se corresponde con dos rectas que se cortan en un único punto.
Condición necesaria y suficiente es que los coeficientes que acompañan a las incógnitas no sean proporcionales entre sí:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow a \cdot b' \neq a' \cdot b$$

- **SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (SCI),** tiene más de una solución (x,y). Gráficamente se corresponde con dos rectas que se superponen, o rectas coincidentes.
Condición necesaria y suficiente es que las dos ecuaciones sean proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

- **SISTEMA INCOMPATIBLE (SI),** no tiene soluciones. Gráficamente se corresponde con dos rectas paralelas distintas.
Condición necesaria y suficiente es que sean proporcionales los coeficientes de x e y, pero no se mantenga esa relación con los términos independiente.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \rightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'} \text{ ó } \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

RESOLUCIÓN POR MÉTODOS ALGEBRAICOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Sustitución Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra. De esta forma queda una ecuación con una sola incógnita, que se resolverá.

Ejemplo:
$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 2x + 3y &= 11 \end{aligned}\right\}$$

Se elige una incógnita para despejar en una de las ecuaciones, en este caso se escogióx en la primera ecuación.

NOTA: se escogió x en la primera ecuación ya que es la incógnita más fácil de despejar al no quedar denominadores, en la expresión despejada. Es importante pensar que incógnita vamos a despejar, y en que ecuación para que las operaciones después sean más sencillas.

Se obtiene:

$$x = 7 - 2y$$

Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación. En este caso, en la segunda ecuación, se sustituye la “x” por la expresión obtenida en la primera ecuación.

$$2 \cdot (7 - 2y) + 3y = 11$$

Se opera para conseguir el valor de la “y”

$$14 - 4y + 3y = 1$$
$$-y = 11 - 14$$
$$-y = -3$$
$$y = 3$$

Una vez conocido el valor de una incógnita se sustituye en la expresión despejada, aunque también es totalmente correcto sustituir en las ecuaciones iniciales.
En este ejemplo el valor de "y" hallado, lo sustituimos en la ecuación despejada

$$x = 7 - 2 \cdot 3$$
$$x = 7 - 6$$
$$x = 1$$

$$Sol.\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Reducción: Se multiplican si es necesario los miembros de una de las ecuaciones *(o de las dos)*, por un número, de tal forma que el coeficiente de una incógnita sea en las dos ecuaciones igual pero de distinto signo. Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones, se elimina la incógnita que tiene el mismo coeficiente, lo cual permite calcular el valor de la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido en una cualquiera de las ecuaciones iniciales.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 11 \end{array}\right\}$$

multiplicamos la primera ecuación por -2, así los coeficientes de una incógnita son iguales pero diferente signo

Sumamos miembro a miembro

$$\left.\begin{array}{r} -\cancel{2x} - 4y = -14 \\ +\cancel{2x} + 3y = +11 \end{array}\right\}$$

$$-y = -3$$
$$y = 3$$

Sustituimos el valor de la incógnita en la primera ecuación

$$x + 2 \cdot 3 = 7$$
$$x = 7 - 6$$
$$x = 1$$

$$Sol.\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 11 \end{array}\right\}$$

Se despeja la misma variable en las dos ecuaciones. En este ejemplo se escoge la variable x por ser más simple, al no quedar en una de las ecuaciones denominadores.

$$x + 2y = 7$$
$$x = -2y + 7$$

$$2x + 3y = 11$$
$$2x = -3y + 11$$
$$x = \frac{-3y + 11}{2}$$

Igualamos las dos expresiones obtenidas.

$$-2y + 7 = \frac{-3y + 11}{2}$$
$$-4y + 14 = -3y + 11$$
$$-4y + 3y = 11 - 14$$
$$-y = -3;\ y = 3$$

Una vez que tenemos una variable sustituyendo en cualquiera de las expresiones despejadas.

$x = -2 \cdot 3 + 7 = 1$

$$Sol.\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN POR MÉTODOS GRÁFICOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Se trata de dibujar las rectas que son la representación gráfica de las dos ecuaciones lineales. De esta manera, las coordenadas del punto de intersección de dichas rectas, son las soluciones (x e y) del sistema.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 3x - y = -5 \\ y - 6x = 11 \end{array}\right\}$

1) Despejamos la "y" en ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} -y = -5 - 3x \\ y = 11 + 6x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 3x + 5 \\ y = 6x + 11 \end{array}\right\}$$

2) Se construye para cada una de las dos ecuaciones de primer grado la tabla de valores. Para ello vamos dando valores a la x *(estos valores los elegimos nosotros, procuraremos que sean valores que nos faciliten las operaciones)* y sustituimos en cada una de las ecuaciones.

$y = 3x + 5$

x	y
0	5
1	8
-1	2

$y = 5 + 3 \cdot 0 = 5$

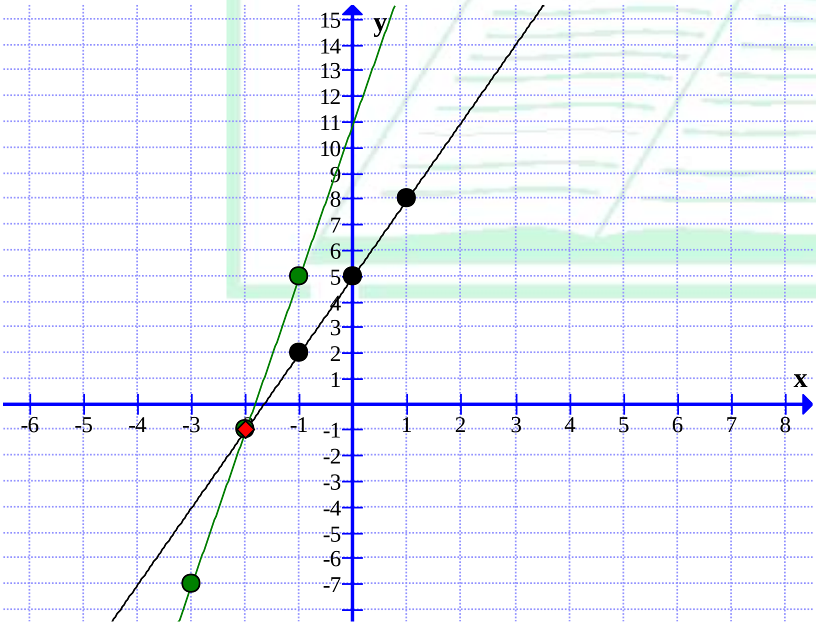
$y = 5 + 3 \cdot 1 = 8$

$y = 5 + 3 \cdot (-1) = 5 - 3 = 2$

$y = 6x + 11$

x	y
-3	-7
-2	-1
-1	5

3) Representamos ambas rectas en el eje de coordenadas.



4) En este último paso hay tres posibilidades:

a) Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas (x,y). "Sistema compatible determinado".
b) Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. "Sistema compatible indeterminado".
c) Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución. "Sistema incompatible".

En nuestro caso podemos ver que las rectas se cortan en el punto (-2,-1) y por lo tanto es un sistema compatible determinado.

$$Sol.\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

PROPORCIONALIDAD, INTERÉS Y PORCENTAJES

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando:

I. A una cantidad determinada de la primera la corresponde una cantidad determinada de la segunda
II. Al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por dicho número.

Ejemplo:
Una bomba de agua tarda 20 minutos en verter 4000 litros de agua. ¿Cuánto tardará en llenar una piscina de 1500 litros?

4000 ———— 20
1500 ———— x

*Para llenar menos litros echará menos tiempo. Por lo tanto, observamos que si disminuyen los litros también disminuye el tiempo. Por tanto, es directamente proporcional.
Colocamos las magnitudes en forma de razón y despejamos la x.

$$\frac{4000}{150} = \frac{20}{x}$$

$$x = \frac{1500 \cdot 20}{4000} = 7{,}5\ minutos = 7\ minutos\ y\ 30\ segundos$$

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, cuando:

I. A una cantidad determinada de la primera le corresponde otra cantidad determinada de la segunda
II. Al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda dividida o multiplicada por dicho número (al contrario).

Ejemplo:
Una cuadrilla de 6 obreros construye una casa en 12 semanas. ¿Cuánto tardarán 3 obreros trabajando en las mismas condiciones?

6 ———— 12
3 ———— x

*Observamos que si son menos obreros van a tardar más días. Por lo tanto, si una aumenta la otra disminuye y viceversa. Si una disminuye, la otra aumenta. Por lo tanto, es inversamente proporcional. Colocamos las magnitudes en forma de razón y como es inversa la que no lleva x la invertimos cambiando el numerador y el denominador, y despejamos la x.

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{x} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{12}{x}$$

$$x = \frac{6\ x\ 12}{3} = \frac{72}{3} = 24\ semanas$$

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

En una granja, 9 conejos comen durante 6 días 12 kg de pienso. En las mismas condiciones, ¿cuántos días tardarán 4 conejos en comerse 8 kg de pienso?

9 ———— 6 ———— 12
4 ———— x ———— 8

*Vamos comparando cada proporción con la x para ver si es directa o inversamente proporcional. Observamos que a menos conejos les dura más días la comida, por lo tanto la primera es inversa. Si les dura menos días la comida es porque comen más al día, por lo tanto la segunda es también inversa.
Colocamos las proporciones, procedemos a invertir las inversas y despejamos la x.

$$\frac{4}{9} = \frac{6}{x} = \frac{8}{12}$$

$$x = \frac{6\ x\ 9\ x\ 12}{4\ x\ 8} = \frac{648}{32} = 20{,}25\ días = 20\ días\ y\ 6\ horas$$

REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Repartir un número dado M en partes directamente proporcionales a varios dados a a_1, a_2, a_3,...es hallar otros números b_1, b_2, b_3,... proporcionales a ellos y cuyo total sea M

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \ldots\ldots = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots} = \frac{M}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}$$

Consiste en que dadas unas magnitudes de un mismo tipo y una magnitud total, calcular la parte correspondiente a cada una de las magnitudes dadas.

Un padre reparte 4500 € entre sus tres hijos de 2, 5 y 8 años de edad, proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

1) El reparto proporcional es:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{8}$$

2) Por la propiedad de las razones iguales:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{8}=\frac{x+y+z}{2+5+8}=\frac{4500}{15}=300$$

3) Cada hijo recibirá:

$$\frac{x}{2}=300\ \rightarrow x=600€ \qquad \frac{y}{5}=300\ \rightarrow y=1500€ \qquad \frac{z}{8}=300\ \rightarrow z=2400€$$

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Repartir un número M, en partes inversamente proporcionales a varios dados a_1, a_2, a_3,...es hallar otros números b_1, b_2, b_3,...inversamente proporcionales a ellos, y cuya suma sea M

$$\frac{b_1}{1/a_1}=\frac{b_2}{1/a_2}=\frac{b_3}{1/a_3}=......=\frac{b_1+b_2+b_3+...}{1/a_1+1/a_2+1/a_3+....}=\frac{M}{1/a_1+1/a_2+1/a_3.....}$$

Dadas unas magnitudes de un mismo tipo y una magnitud total, debemos hacer un reparto directamente proporcional a los inversos de las magnitudes.

Un padre reparte 6600 € entre sus tres hijos de 2, 5 y 8 años de edad, en partes inversamente proporcionales a su edad. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

1) Tomamos los inversos

$$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{8}$$

2) Reducimos a común denominador

$$\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{8}=\frac{20}{40},\frac{8}{40},\frac{5}{40}$$

3) Realizamos un reparto directamente proporcional a los numeradores (20, 8 y 5)

$$\frac{x}{20}=\frac{y}{8}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{20+8+5}=\frac{6600}{33}=200$$

$$\frac{x}{20}=200\ \rightarrow x=4000€ \qquad \frac{y}{8}=200\ \rightarrow x=1600€ \qquad \frac{z}{5}=200\ \rightarrow x=1000\ €$$

INTERÉS SIMPLE

Interés simple es el beneficio producido por una suma de dinero prestada durante un cierto tiempo

$i=\dfrac{C\cdot r\cdot t}{100}$ capital impuesto en años

$i=\dfrac{C\cdot r\cdot t}{1200}$ capital impuesto en meses

$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$ capital impuesto en días

i= interés	C= capital	r= rédito en%	t= tiempo

INTERÉS COMPUESTO

$C_f = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ Capital impuesto en años

$C_f = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^n$ Capital impuesto en meses

$C_f = C_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{36000}\right)^n$ Capital impuesto en días

PORCENTAJES

Un porcentaje es una razón con denominador 100. El total de una cantidad se expresa como el 100%. El 50 % equivale a la mitad de la cantidad. El 25 % es la cuarta parte de la cantidad .El 10 % es la décima parte de la cantidad.

Ejemplo:

Calcula el 23 % de 800: $800 \cdot \frac{23}{100} = 184$

Porcentajes encadenados:

Para aplicar sobre una misma cantidad dos o más porcentajes, se pasan a tantos por uno y se aplican sucesivamente-

DESCUENTO PORCENTUAL

El descuento es la diferencia entre la cantidad inicial y la cantidad final.

Si a una cantidad inicial (C_0) se le aplica una disminución del r %, la cantidad final (C_f) se calcula:

$$\boldsymbol{C_f = C_0\left(1 - \frac{r}{100}\right)}$$

Al descontarnos un r % de una cantidad inicial, la cantidad final será el (100 – x) %.

Ejemplo:

Al comprar un ordenador me ofrecen un 12 % de descuento por pagarlo al contado. He pagado 528 €. ¿Cuánto valía el ordenador sin descuento?

$$528 = C_0\left(1 - \frac{12}{100}\right) \qquad C_0 = \frac{528}{0{,}88} = 600\ €$$

Al aplicar el 12 % de descuento sólo pagaremos el 80 % de la cantidad inicial. Por lo tanto, además de la fórmula, podemos hacer el ejercicio de la siguiente forma:

100 % $\longrightarrow C_0$

80 % $\longrightarrow 528$

$$C_0 = \frac{528 \cdot 100}{88} = 600\ €$$

INCREMENTO PORCENTUAL

El incremento es la diferencia entre la cantidad final y la cantidad inicial, ya que el tanto por ciento aplicado se añade a la cantidad inicial.

Si a una cantidad inicial ($C_{0)}$ se le aplica un incremento del r %, la cantidad final ($C_{f)}$ se calcula:

$$\boldsymbol{C_f = C_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)}$$

Al incrementarnos un r % de una cantidad inicial, la cantidad final será el (100 + x) %.

Ejemplo:
Por no pagar una multa de 150 € me han aplicado un 12 % de recargo. ¿Cuánto he pagado al final?

$$C_f = 150\left(1 + \frac{12}{100}\right) = 150 \cdot 1{,}12 = 168\ €$$

Al aplicar el 12 % de recargo (incremento), pagaremos el 112 % de la cantidad inicial. Por lo tanto, además de la fórmula, podemos hacer el ejercicio de la siguiente forma:

100 % $\longrightarrow 150$

112 % $\longrightarrow C_f$

$$C_f = \frac{150 \cdot 112}{100} = 168\ €$$

ESCALAS: PLANOS Y MAPAS
La escala es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida. Por ejemplo, si en un mapa aparece señalada la siguiente escala (1:20 000), se interpreta que 1 cm del mapa representa 20 000 cm en la realidad. A la hora de resolverlo se puede aplicar el concepto de regla de tres directa.

PROGRESIONES O SUCESIONES NUMÉRICAS

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Sea una sucesión cualquiera, formada por los elementos: 2, 5, 8, 11, ...

Llamamos a_1 al número 2, que es el primer término; a_2, al 5, que es el segundo término...
Si al segundo término le restamos el primero, encontramos el número 3 que es la clave para hallar los siguientes números.
Por lo tanto a_2 - a_1 = 3; a éste número le llamaremos diferencia representado por d.

Para hallar un término, se usa la expresión $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$

n es el lugar que ocupa el término que queremos hallar.

NOTA: Si piden hallar el término general, sustituir en la anterior expresión el valor de la diferencia (d) y valor del primer término (a_1). Posteriormente operar juntando términos semejantes.

Para hallar la suma de los n términos de una progresión geométrica se utiliza la expresión.

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Ejemplo: Hallar la suma de los 10 primeros términos. En la siguiente progresión: 3,5,7,9...

1. Calculamos la diferencia: $\boldsymbol{d = 5 - 3 = 2}$

2. Hallamos el último término que queremos sumar, en nuestro caso el término que ocupa la posición décima. Para ello, usamos la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$
   $\boldsymbol{a_{10} = 3 + (10-1) \cdot 2 = 3 + 18 = 21}$es el término que ocupa la posición 10

3. Aplicamos la fórmula de la suma, que hemos particularizado para nuestro ejemplo:
   $\boldsymbol{S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{3+21}{2} \cdot 10 = 120}$es la suma de los 10 primeros términos.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

En matemáticas, una progresión geométrica está constituida por una secuencia de elementos en la que cada uno de ellos se obtiene multiplicando el anterior por una constante denominada razón de la progresión.
Ejemplo, {1, 2, 4, 8, 16,...} es una progresión geométrica cuya razón vale 2.

Para hallar un término se usa la expresión $\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

NOTA: Si piden hallar el término general, sustituir en la anterior expresión el valor de la razón(r) y valor del primer término (a_1). Posteriormente se opera.

Suma de los n término de una progresión geométrica.

Si $r > 1;\ S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \dfrac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1}$

Si $0 < r < 1;\ S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$

Suma de los infinitos términos de una progresión geométrica $0 < r < 1$

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

Ejemplo: Hallar la suma de los 10 primeros términos. En la siguiente progresión: 3,6,12,24...

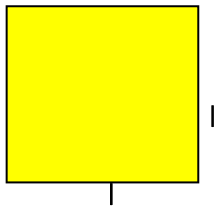
1. Calculamos la razón: $\boldsymbol{r = \frac{6}{3} = 2}$

2. Hallamos el último término que queremos sumar, en nuestro caso el término que ocupa la posición décima. Para ello, usamos la fórmula $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$
   $\boldsymbol{a_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 3 \cdot 512 = 1536}$ es el término que ocupa la posición 10

3. Aplicamos la fórmula de la suma, que hemos particularizado para nuestro ejemplo:
   $\boldsymbol{S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{1536 \cdot 2 - 3}{2-1} = 3069}$ es la suma de los 10 primeros términos.

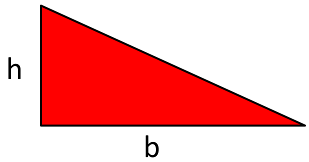
FIGURAS PLANAS Y PROPIEDADES MÉTRICAS

Cuadrado



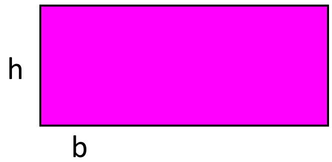
$\boxed{S = l x l}$

Triángulo



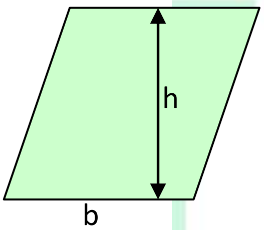
$\boxed{S = \frac{bxh}{2}}$

Rectángulo



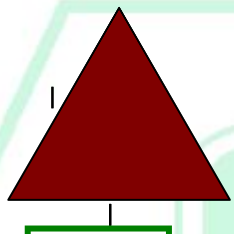
$\boxed{S = bxh}$

Paralelogramo



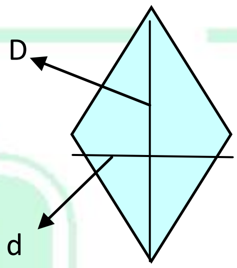
$\boxed{S = bxh}$

Triángulo equilátero



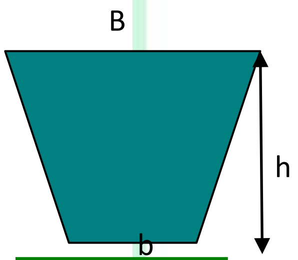
$\boxed{S = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}$

Rombo



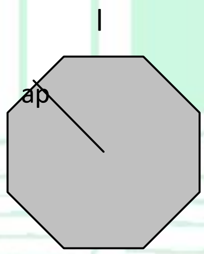
$\boxed{S = \frac{Dxd}{2}}$

Trapecio



$\boxed{S = \left(\frac{B+b}{2}\right) xh}$

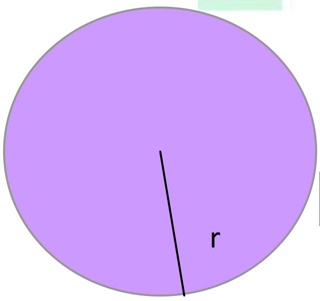
Polígonos Regulares



ap= apotema
pe= perímetro (la suma de sus lados)

$\boxed{S = \frac{pexap}{2}}$

Circunferencia y círculo

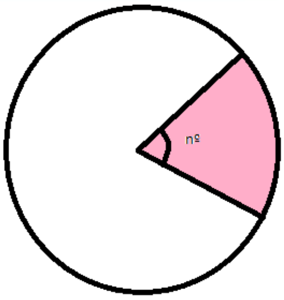


$\boxed{L = 2\Pi r}$

$\boxed{S = \Pi r^2}$

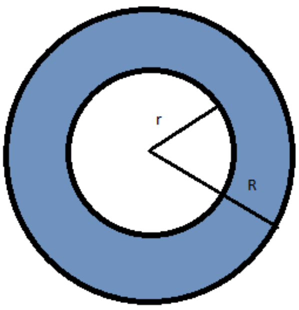
r= radio
L= longitud circunferencia

Sector Circular



$\boxed{S = \frac{\Pi \cdot r^2 \cdot n^o}{360^o}}$

Corona Circular



$$S = \Pi(R^2 - r^2)$$

R= radio circulo mayor
r= radio circulo menor

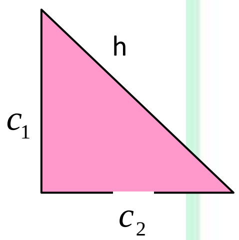
PROPIEDADES MÉTRICAS DE LAS FIGURAS PLANAS.

-SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO.

$$\mathbf{S = 180^{\circ} \cdot (n - 2)}$$

-TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras nos indica una relación que existe entre los cuadrados de los lados de un triángulo y el cuadrado de la hipotenusa.



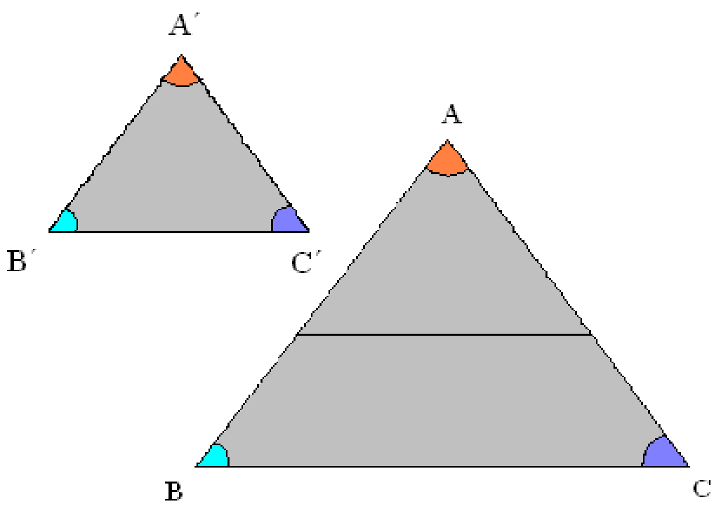
h→hipotenusa

c_1,c_2→catetos

La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

$$\boxed{h^2 = c_1^2 + c_2^2}$$

-TRIÁNGULOS SEMEJANTES



1. Tienen dos ángulos correspondientes iguales.

Ejemplo: $\boxed{\hat{A} = \hat{A}'}$ y $\boxed{\hat{B} = \hat{B}'}$

2. Tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman.

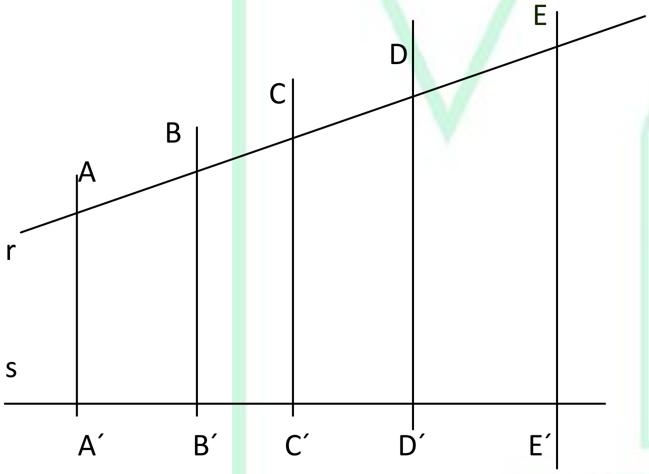
Ejemplo: $\boxed{\hat{B} = \hat{B}'}$ .Y $\boxed{\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}}$

3. Tienen sus lados homólogos y proporcionales .

Ejemplo: $\boxed{\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k}$

NOTA 1: k es la razón de semejanza, que es la constante de proporcionalidad entre sus lados.
NOTA2: Si k es la razón de semejanza, en áreas es k^2 y en volúmenes k^3

-TEOREMA DE TALES



$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots}$$

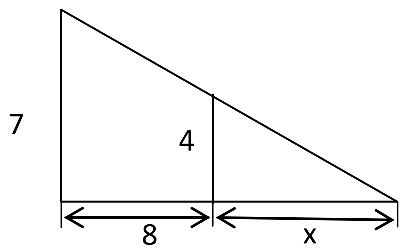
La constante de proporcionalidad se denomina razón de semejanza.

Ejemplo:

Supongamos que la distancia AB es de 3 cm y que la distancia A´B´ es de 1,5 cm, la razón sería $\frac{3}{1{,}5}$.

Ahora supongamos que la distancia entre BC es de 1 cm pues la distancia de B´C´ tiene que ser de 0,5. y la razón sería $\frac{1}{0{,}5}$. Podemos comprobar que $\frac{3}{1{,}5} = \frac{1}{0{,}5} = 2$.

Otro caso de teorema de Tales muy típico son los triángulos en posición de Tales, lógicamente se mantiene el mismo principio. Pero se cambia un poco la forma de enunciarlo. Todos los lados de un triángulo son proporcionales en la misma razón a los lados de sus triángulos semejantes. Por lo tanto yo puedo formar una proporción entre dos lados. Para entenderlo mejor, se hallará el valor de x en el siguiente triángulo, basándonos en el concepto previamente explicado.

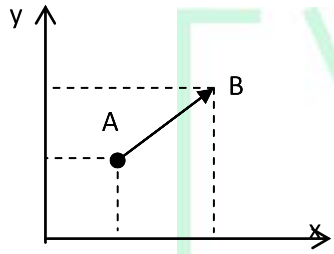


$$\frac{x}{x+8}=\frac{4}{7}\rightarrow 7x=4x+32\rightarrow 3x=32\rightarrow x=\frac{32}{3}=10,\widehat{6}$$

GEOMETRÍA PLANA

Suponemos dos puntos:

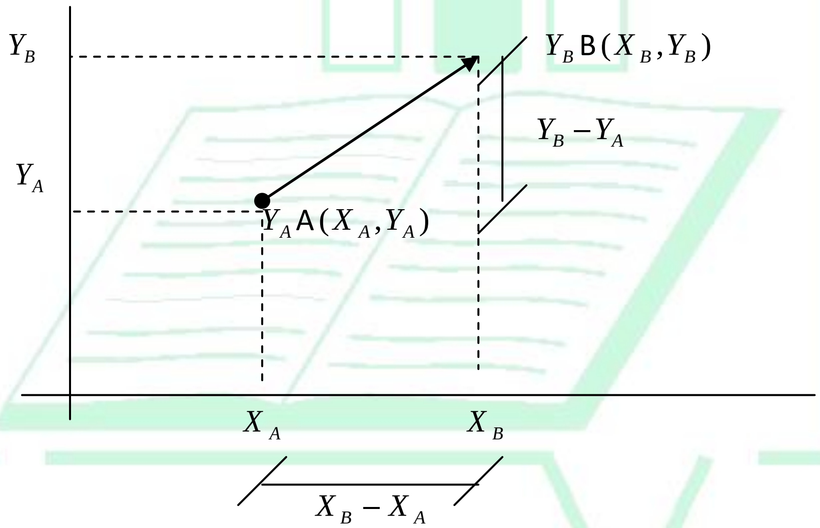
A (X_A, Y_A) B (X_B, Y_B)



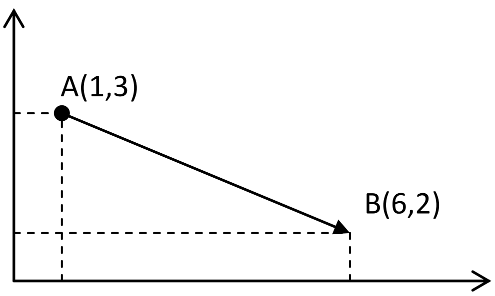
Componentes de un vector: Son las proyecciones del vector sobre los ejes coordenadas.

$$\overrightarrow{AB}=[X_B-X_A, Y_B-Y_A] \quad \begin{array}{l} X_B-X_A \rightarrow 1^{a}\,Componente \\ Y_B-Y_A \rightarrow 2^{a}\,Componente \end{array}$$

Vector fijo: Todo par ordenado de puntos $\overrightarrow{AB}$.



Ejemplo:



$$\overrightarrow{AB}=(6-1,2-3)=(5,-1)$$

Módulo de un vector: Es el valor numérico del vector. Es la distancia entre el origen y el extremo.

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(X_B-X_A)^2+(Y_B-Y_A)^2}$$

Ejemplo: Tomando como referencia los datos de la

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(6-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}\approx 5{,}1$$

Dirección: Es la recta sobre la cual se mueve el vector.

Sentido: Es el de la flecha. (origen-Extremo)

Vector libre: Es el conjunto de todos los vectores fijos equipolentes entre si o conjunto de todos los vectores fijos con las mismas componentes.

Punto medio de un segmento: Es el punto que esta a igual distancia de los extremos del segmento.

$$\mathrm{M}=\left(\frac{X_A+X_B}{2},\frac{Y_A+Y_B}{2}\right)$$

Ejemplo:
Dado el Punto A=(1,3) y el Punto B=(6,2)

$$\mathrm{M}=\left(\frac{1+6}{2},\frac{3+2}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$$

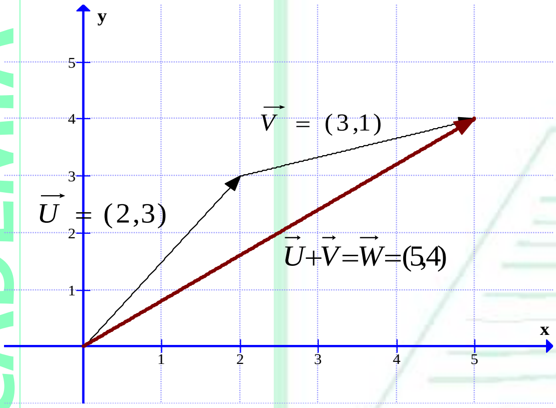
Producto escalar de dos vectores libres.:

$$\vec{\mathrm{U}}=(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2)\ \mathrm{Y}\ \vec{\mathrm{V}}=(\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2):\forall\,\vec{\mathrm{U}},\vec{\mathrm{V}}\neq 0:$$

$$\vec{\mathrm{U}}\cdot\vec{\mathrm{V}}=|\mathrm{U}|\cdot|\mathrm{V}|\cdot\mathrm{Cos}(\widehat{\mathrm{U},\mathrm{V}}).$$

OPERACIONES CON VECTORES

Suma de dos vectores libres:



$$\vec U=(U_1,U_2)\,y\,\vec V=(V_1,V_2):\vec U+\vec V=(U_1+V_1,U_2+V)$$

Esto originará un nuevo vector $\vec W=(U_1+V_1,U_2+V)$

Ejemplo:

$$\vec U=(2,3)\,y\,\vec V=(3,1):\vec U+\vec V=(2+3,3+1)=(5,4):$$

$$\vec W=(2+3,3+1)=(5,4)$$

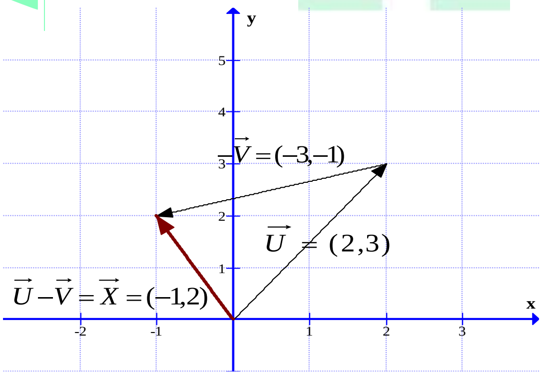
Diferencia de dos vectores libre

$$\vec{\mathrm{U}}=(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2)\ \mathrm{y}\ \vec{\mathrm{V}}=(\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2):\vec{\mathrm{U}}+(-\vec{\mathrm{V}})=(U_1-V_1,U_2-V_2)$$

Esto originará un nuevo vector $\vec{\mathrm{X}}=(U_1-V_1,U_2-V_2)$

Ejemplo:

$\vec U=(2,3)\,y\,\vec V=(3,1):\vec U-\vec V=(2-3,3-1)=(-1,2)$ **NOTA:** Es el que resulta de sumar el primero con el opuesto del segundo

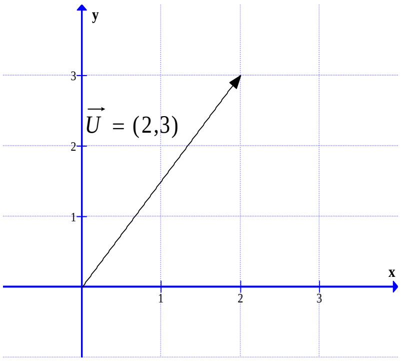


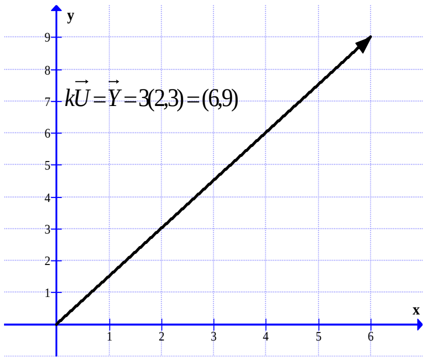
Producto de un número por un vector: k $\vec{U} = (kU_1, kU_2)$

Ejemplo:

$\vec{U} = (2,3)$ k= 3 $3\vec{U} = \vec{Y} = (2\times 3, 3\times 3) = (6,9)$

Representación gráfica





CARACTERÍSTICAS A TENER EN CUENTA

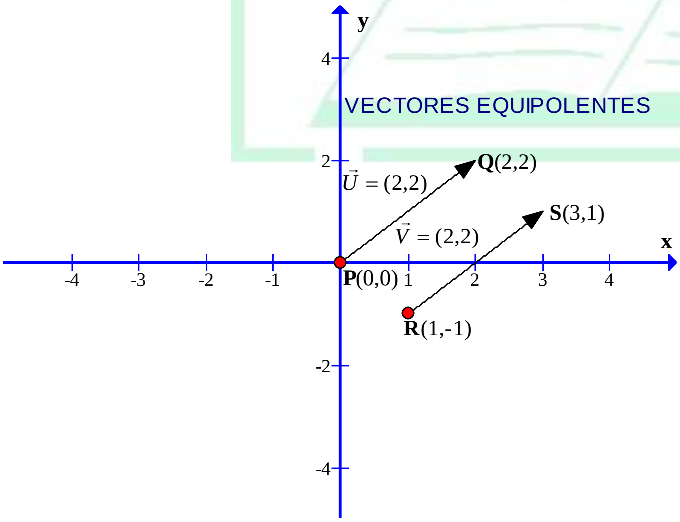
- Cuando un vector tiene como origen el punto (0,0) *(origen de coordenadas)* sus coordenadas coinciden con las del extremo.
- Un vector queda determinado si se conoce su módulo, su dirección y su sentido.
- Dos vectores tienen la misma dirección si están situados en la misma recta o en rectas paralelas.
- **Vectores equipolentes:** Son los que tiene el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

  Ejemplo de vectores equipolentes:

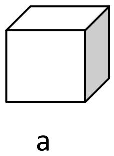
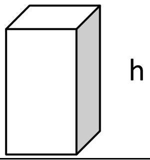
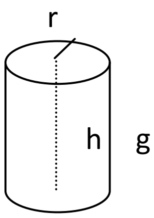
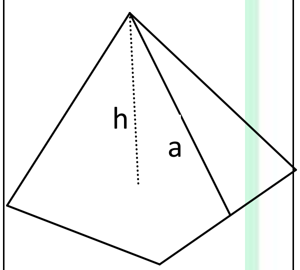
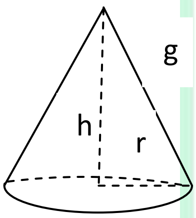
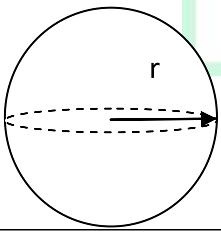
$$\left.\begin{matrix} P(0,0) \\ Q(2,2) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{PQ} = (2-0, 2-0) = (2,2)$$

$$\left.\begin{matrix} R(1,-1) \\ S(3,1) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{RS} = (3-1, 1-(-1)) = (2,2)$$

A continuación los veremos en su representación gráfica



CUERPOS GEOMÉTRICOS

CUERPOS	AREAS		VOLÚMENES
	LATERAL	TOTAL	
	$A_L = 4a^2$	$A_T = 6a^2$	$V = a^3$
	$A_L = P(perimetro\ base)\cdot h$	$A_T = A_L + 2A_B$	$V = A_B \cdot h$
	$A_L = 2\cdot\pi\cdot r\cdot g$	$A_T = A_L + 2\cdot A_B$	$V = \pi\cdot r^2\cdot h$
	$A_L = \frac{P\cdot a}{2}$	$A_T = A_L + A_B$	$V = \frac{1}{3}A_B\cdot h$
	$A_L = \pi\cdot r\cdot g$	$A_T = A_L + A_B$	$V = \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$
	$A = 4\cdot\pi\cdot r^2$		$V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$

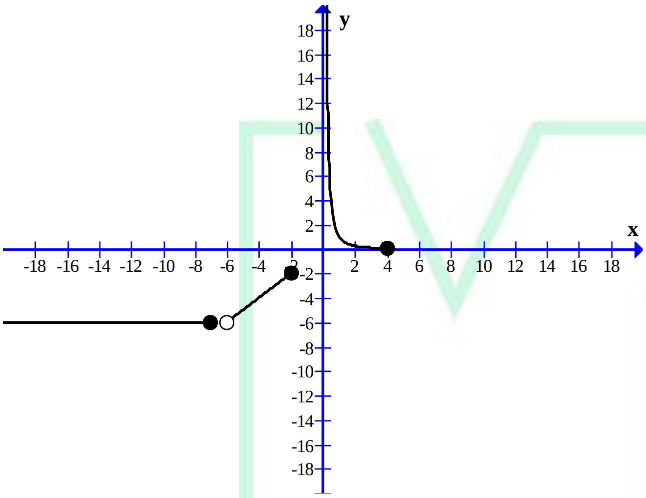
FUNCIONES

DOMINIO Y RECORRIDO

El dominio de una función: está formado por aquellos valores de x (números reales) para los que se puede calcular la imagen f(x). Gráficamente lo determinamos en el eje OX mirando de izquierda a derecha.

Recorrido o rango de una función: es el conjunto formado por las imágenes. Son los valores que toma la función f(x). Su valor depende del valor dado a la variable independiente "x". Gráficamente se puede ver en el eje OY de ordenadas, leyendo de abajo a arriba.

Ejemplo de cálculo de dominio y recorrido gráficamente:



$$Dom[f(x)] = (-\infty,-7] \cup (-6,-2] \cup (0,+\infty)$$

$$R[f(x)] = [-6,-2] \cup [0,+\infty)$$

NOTA 1: *Si el punto extremo está dentro del intervalo definido en la función se representa por un circulo relleno (en los intervalos se representa mediante el corchete). Si el punto no lo contiene la función se representa por un circulo sin relleno (en los intervalos se representa mediante un paréntesis).*
NOTA 2: *Los infinitos en el intervalo siempre llevan paréntesis.*

SIMETRÍAS

- Una función $f(x)$ es simétrica respecto al eje OY (simetría par), cuando se verifica que $f(-x) = f(x)$.
  Ejemplo: $f(x) = x^2 - 4$; para hallar $f(-x)$se sustituye en la función la variable x por $-x$

  $$f(-x) = (-x)^2 - 4; (todo\ número\ elevado\ a\ exponente\ par\ queda\ positivo\ )$$

  $$f(-x) = x^2 - 4$$

  Como se puede ver $f(x) = f(-x)$, por lo tanto se puede concluir que es una función par.

- Una función $f(x)$ es simétrica respecto al origen de coordenadas (simetría impar),cuando se verifica que $f(-x) =. -f(x)$.
  Ejemplo: $f(x) = 3x^3 - x$

  $$f(-x) = 3(-x)^3 — x = 3x^3 + x$$

  $$-f(x) = -3x^3 + x;$$

  Como $f(-x) = -f(x)$ $Podemos\ afirmar\ que\ es\ una\ función\ impar.$

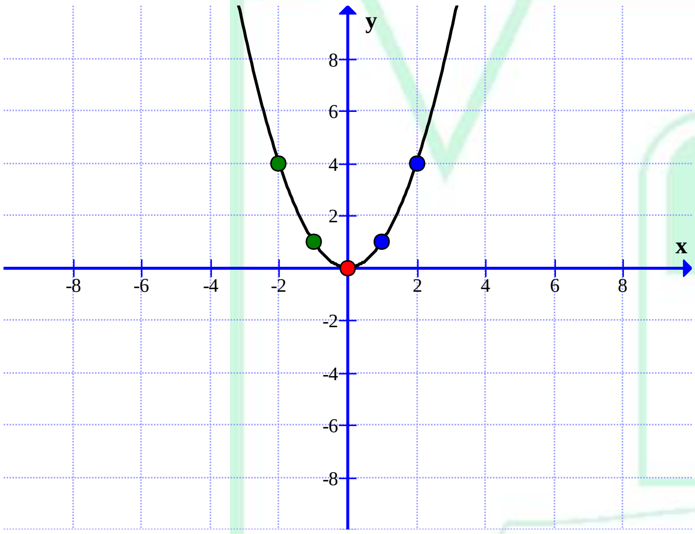
PERIODICIDAD

Una función es periódica cuando los valores que toman se repiten cada cierto intervalo de tiempo llamado periodo y comúnmente representado por T.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Función creciente: una función es creciente cuando al aumentar los valores de la variable independiente “x” aumentan los valores de la variable dependiente “y”, o inversamente si al disminuir los valores de la variable independiente “x”, también disminuyen los valores de la variable dependiente “y”. La diferencia entre los valores de x se llama tasa de variación, y en este caso es positiva.
Función decreciente: una función es decreciente cuando su tasa de variación es negativa. Al aumentar los valores de la variable independiente “x”, disminuyen los valores de la variable dependiente “y”, o viceversa. En este caso la tasa de variación es negativa.
Función constante: una función es constante cuando su tasa de variación es nula.

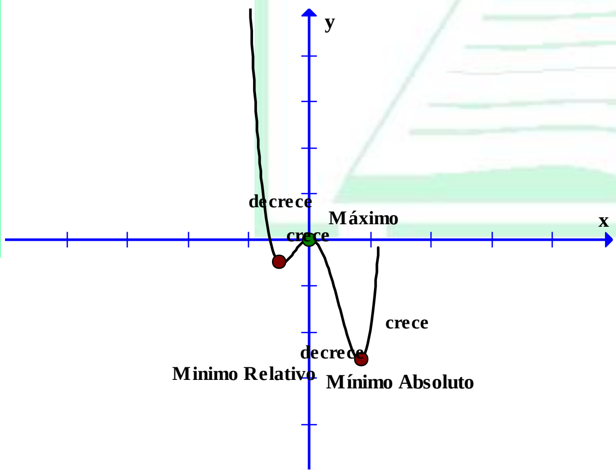
Ejemplo:



Decreciente: $(-\infty,0)$
Creciente: $(0,+\infty)$

Se puede observar como en los puntos (-2,4) y (-1,1) a medida que aumenta el valor de la “x”, disminuye el valor de la “y”, por lo que es decreciente. Mientras que en los puntos (1,1) y (2,4) a medida que crece el valor de “x”, también crece el valor de “y”, por lo tanto es creciente.

MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN



Una función f tiene en x=a un:

Máximo relativo: f(a) es el mayor valor de f en un entorno de a.
Mínimo relativo: f(a) es el menor valor de f en un entorno de a.
Máximo absoluto: f(a) es el mayor valor de f en todo el dominio.
Mínimo absoluto: f(a) es el menor valor de f en todo el dominio.

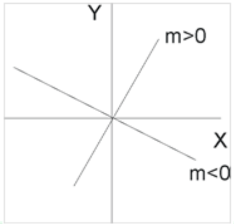
FUNCIÓN CONSTANTE $\boxed{y = k}$

a) Dom f = $\mathbb{R}$

b) Imagen = k

c) Simetrías $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ par

FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA (F. LINEAL) $\boxed{y = mx}$



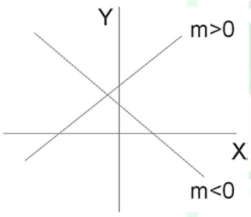
a) Dom f = R

b) Imagen = $\mathbb{R}$

c) Simetrías: $f(x) = -f(-x) \Rightarrow$ impar

d) Monotonía $\begin{cases} m > 0 \Rightarrow creciente \ \Re \\ m < 0 \Rightarrow decreciente \ \Re \end{cases}$

FUNCIÓN AFIN $\boxed{y = mx + n}$



a) Dom f = $\mathbb{R}$

b) $f(D)$ = $\mathbb{R}$

c) Simetrías: no tiene

d) Crecimiento $\begin{cases} m > 0 \Rightarrow creciente \ \Re \\ m < 0 \Rightarrow decreciente \ \Re \end{cases}$

m$\Rightarrow$ pendiente
n$\Rightarrow$ ordenada en el origen

NOTA: Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales, en caso contrario son secantes.

ESTADÍSTICA

MEDIDAS DE DISTRIBUCIÓN CENTRAL (MEDIA, MEDIANA Y MODA)

MEDIA:

Es la medida de posición central más utilizada, la más conocida y la más sencilla de calcular, debido principalmente a que sus ecuaciones se prestan para el manejo algebraico, lo cual la hace de gran utilidad. Su principal desventaja radica en su sensibilidad al cambio de uno de sus valores o a los valores extremos demasiado grandes o pequeños. La media se define como la suma de todos los valores observados, dividido por el número total de observaciones.

$$\boxed{\text{Media aritmética} = \frac{\textit{Suma} \text{ de todos los valores observados}}{\text{Número total de observaciones}}}$$

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum X_i \times f_i}{N}}$$

MEDIANA:

Con esta medida podemos identificar el valor que se encuentra en el centro de los datos, es decir, nos permite conocer el valor que se encuentra exactamente en la mitad del conjunto de datos, después que las observaciones estén ubicadas en una serie ordenada. Esta medida nos indica, que la mitad de los datos se encuentran por debajo de este valor y la otra mitad por encima del mismo. Para determinar la posición de la mediana se utiliza la fórmula.

$$\boxed{\text{Posición de la mediana} = \frac{N+1}{2}}$$

MODA:

La medida modal nos indica el valor que más veces se repite dentro de los datos.

MEDIDAS DE POSICIÓN: CUANTILES

Los cuantiles son valores de la distribución que la dividen en partes iguales, es decir, en intervalos, que comprenden el mismo número de valores. Los más usados son los cuartiles, los deciles y los percentiles.

- **PERCENTILES:** son 99 valores que dividen en cien partes iguales el conjunto de datos ordenados. Ejemplo, el percentil de orden 15 deja por debajo al 15% de las observaciones, y por encima queda el 85% de ellas.
- **CUARTILES:** son los tres valores que dividen al conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales, son un caso particular de los percentiles:
  - El primer cuartil Q 1 es el menor valor que es mayor que una cuarta parte de los datos (N/4)
  - El segundo cuartil Q 2 (la mediana), es el menor valor que es mayor que la mitad de los datos (2N/4).
  - El tercer cuartil Q 3 es el menor valor que es mayor que tres cuartas partes de los datos (3N/4)
- **DECILES:** son los nueve valores que dividen al conjunto de datos ordenados en diez partes iguales, son también un caso particular de los percentiles.

Ejemplo: En una localidad se realiza un estudio de 40 familias sobre el número de hijos (xi) que tienen.

Calcula:

a) Percentil 10 y 25
b) Primer, segundo y tercer cuartil
c) Segundo decil

x_i	f_i	F_i
0	4	4
1	8	12
2	5	17
3	8	25
4	8	33
5	7	40
	n=40	

Recordemos que elxise identifica con el número de hijos que tiene cada familia, y el fi se identifica con el número de familias que tienen cero hijos, un hijo…

Ejemplos de percentiles, cuartiles y deciles:

- Percentil 25 $= \frac{25 \times 40}{100} = 10$ Mirando en la Fiobservamos que el primer valor que nos engloba al 10 es el 12, por lo tanto el valor correspondiente a 12 es xi=1. Recordemos que hay que dar el valor que nos da xi
- Percentil 10 $= \frac{10 \times 40}{100} = 4$ Mirando en la Fiobservamos que el valor 4 está justo en el límite entre la xi=0 y la xi=1 sumando los valores y dividiendo entre 2 nos da 0,5.
- Primer Cuartil (Q1) $= \frac{40}{4} = 10$ podemos ver que corresponde con el percentil 25, por lo tanto xi=1.
- Segundo Cuartil(Q2) $= \frac{2 \times 40}{4} = 20$ podemos ver que coincide con la mediana, y fijándonos en Fi vemos que el primer valor que lo engloba es 25 por lo tanto la xi=3.
- Tercer Cuartil(Q3) $= \frac{3 \times 40}{4} = 30$, este cuartil coincide con el percentil 75, fijándonos en Fi vemos que el primer valor que lo engloba es 33 por o tanto la xi=4.
- Segundo Decil (D2) $= \frac{2 \times 40}{10} = 8$ fijándonos en Fi vemos que el primer valor que lo engloba es 12 por o tanto la xi=1.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN ABSOLUTAS

VARIANZA:

(s^2): Es el promedio del cuadrado de las distancias entre cada observación y la media aritmética del conjunto de observaciones.

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum x_i^2 \times f_i}{N} - \overline{x}^2}$$

DESVIACIÓN TÍPICA:

(s): La varianza viene dada por las mismas unidades que la variable pero al cuadrado, para evitar este problema podemos usar como medida de dispersión la desviación típica que se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$\boxed{s = \sqrt{s^2}}$$

RECORRIDO O RANGO DE UNA MUESTRA:

(R_e). Es la diferencia entre el valor de las observaciones mayor y el menor. $R_e = x_{max} - x_{min}$

MEDIDAS DE DISPERSIÓN RELATIVAS

COEFICIENTE DE VARIACIÓN DE PEARSON:

Cuando se quiere comparar el grado de dispersión de dos distribuciones que no vienen dadas en las mismas unidades o que las medias no son iguales se utiliza el coeficiente de variación de Pearson que se define como el cociente entre la desviación típica y el valor absoluto de la media aritmética.

$$\boxed{\mathrm{CV} = \frac{s}{\overline{x}}}$$

CVrepresenta el número de veces que la desviación típica contiene a la media aritmética y por lo tanto cuanto mayor es CVmayor es la dispersión y menor la representatividad.

Ejemplo: Hallar todas las medidas de dispersión que conocemos a partir de la siguiente tabla. En la que se estudió en una población la cantidad de personas que juegan a los bolos en función de la edad de los mismos.

x_i	**$L_0 - L_1$**	**f_i**	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
10	**0-20**	**10**	10	100	$10^2.10=1000$
30	**20-40**	**32**	42	960	28800
50	**40-60**	**18**	60	900	45000
70	**60-80**	**20**	80	1400	98000
		N=80		$\sum 3360$	$\sum 172800$

1) Lo primero tendremos que hallar la media ya que es necesaria para los cálculos.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \times f_i}{N} = \frac{3360}{80} = 42$$

2) Calculamos la varianza

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 \times f_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{172800}{80} - 42^2 = 396$$

3) Calculamos la desviación típica:

$s = \sqrt{396} = 19{,}90$ Esto nos indica la dispersión de los datos. Es decir lo que se distancian de la media. Es decir, que la mayoría de los datos están 19,90 por encima de la media y 19,90 por debajo de la media.

4) Calculamos el CV

$CV = \dfrac{19{,}90}{42} = 0{,}47 = 47\%$ Esto nos índica la dispersión. Al ser un % nos permite comparar la dispersión de diferentes distribuciones estadísticas entre sí.

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS.

Entre los diferentes tipos podemos resaltar los siguientes:

1) Histograma
2) Diagrama de Barras
3) Diagrama de sectores

HISTOGRAMA

Se utiliza para variables cuantitativas continuas. Es decir entre dos puntos cualquiera existen infinitos puntos. Ej. Estatura, edad, monedas….

La siguiente tabla nos muestra en una población la cantidad de personas que juegan a los bolos en función de la edad de los mismos.

L0 – L1	FI
0-20	**10**
20-40	**32**
40-60	**18**
60-80	**20**
	N=80

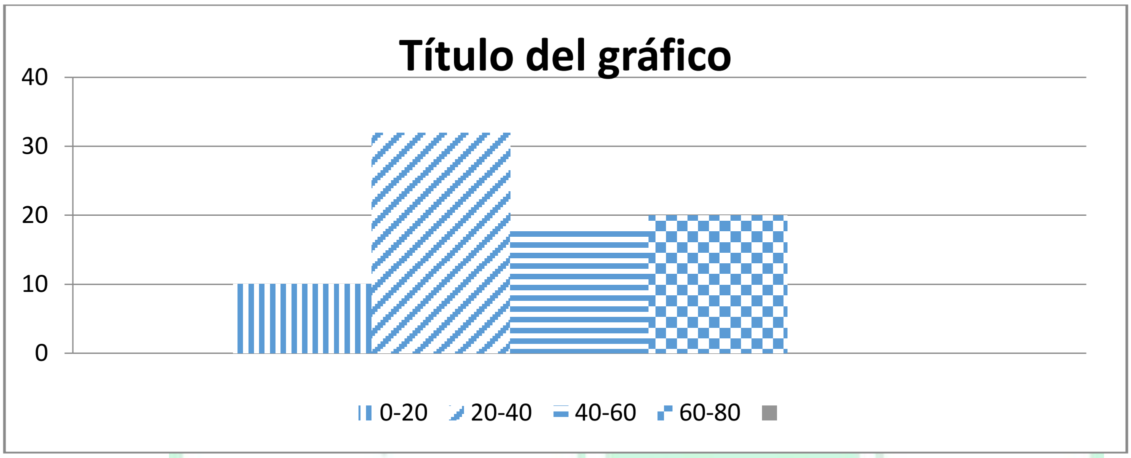


DIAGRAMA DE BARRAS

Se utiliza para variables cuantitativas discretas. Es decir entre dos puntos cualquiera hay puntos finitos. Ej. Número de amigos, bolsas de patatas compradas….

X_i	F_i
0	4
1	8
2	5
3	8
4	8
5	7

El siguiente gráfico nos muestra el número de botellas de agua compradas en una semana en la máquina del centro por los alumnos de un aula.

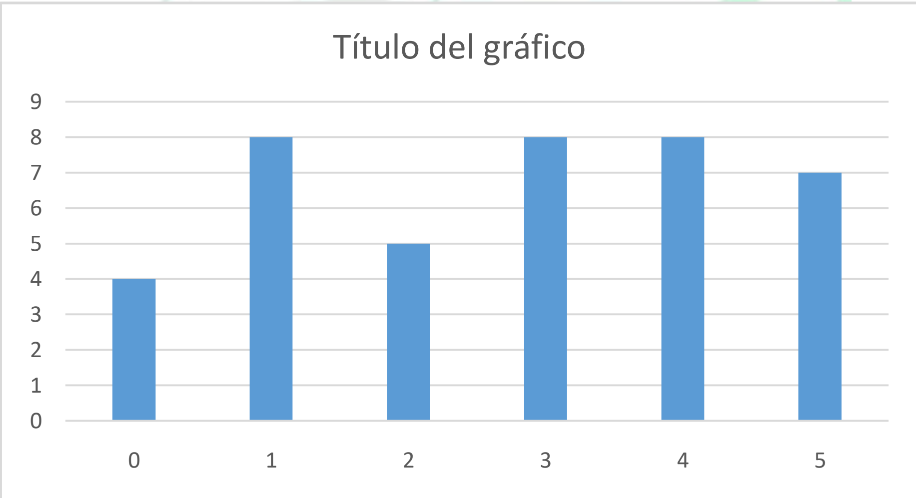


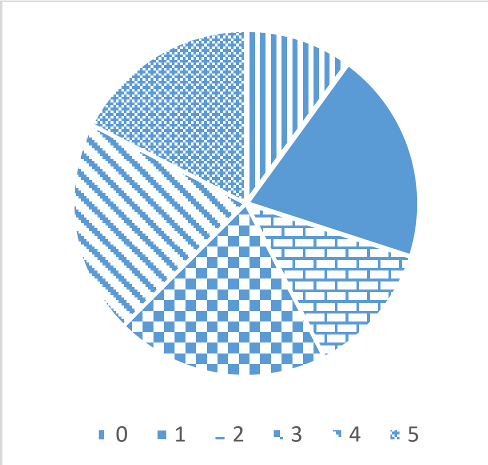
DIAGRAMA DE SECTORES

Se utiliza para variables cuantitativas discretas y continuas.

Usando el mismo ejemplo que en el apartado anterior. No obstante hay que calcular previamente los diferentes ángulos para cada sectores circular que representaremos. Para ellos vamos a aplicar la siguiente fórmula.

$$grados\ de\ cada\ sector = \frac{fi}{N} \cdot 360°$$

X_I	F_I	°
0	4	36°
1	8	72°
2	5	45°
3	8	72°
4	8	72°
5	7	63°
	N=40	



PROBABILIDAD

DEFINICIÓN DE LA PLACE

Sea el suceso A y el $\bar{A}$, el suceso contrario (A y $\bar{A}$ son sucesos incompatibles) se cumple:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}}$$

Ejemplo: Tenemos una baraja española y queremos saber la probabilidad de sacar un oro.
La baraja española consta de 40 cartas y de cuatro palos oros, copas, espadas y bastos con 10 cartas cada palo. Por lo tanto la probabilidad es:

$P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0,25$ Es decir hay un 25% de posibilidades de sacar un oro

***La probabilidad del suceso contrario** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
En el ejemplo anterior la probabilidad del suceso contrario sería la probabilidad de sacar una carta que no fuera oros. Cuya probabilidad es: $P(\bar{A}) = 1 - 0,25 = 0,75$

***La probabilidad del suceso imposible** $P(\Phi) = 0$
Un Suceso imposible sería en un dado de 6 caras numeradas del 1 al 6, la probabilidad de obtener un 7.
***La probabilidad del suceso cierto** $P(E) = 1$
El suceso cierto es aquel que se cumple siempre. Por ejemplo, en una baraja española sería sacar una carta que fuera de oros, copas, espadas o bastos. Como esto incluye todas las posibilidades la probabilidad del suceso sería 1.
***Para cualquier suceso A., siempre se cumple.** $0 \le P(A) \le 1$
Es decir que toda probabilidad se encuentra entre 0 y 1
***Intersección de sucesos:** $A \cap B$ es el suceso formado por todos los elementos que son a la vez de A y de B.

Para calcularlo se multiplican las probabilidad de que ocurra el suceso A por la de que ocurra el suceso B. Lógicamente tienen que tener las dos probabilidades elementos en común.

Ejemplo:

P(A)= Sacar en la baraja española una carta de oros
P(B)= Sacar en la baraja española una figura
Hallar P($A \cap B$)

1) Calculamos la P(A)= $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$
2) Calculamos la P(B)= $\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

Ahora quiero calcular la probabilidad de que ocurra A **y** B (resalto la y en negrita ya que es lo que nos puede dar la pista en un problema para saber que tenemos que hacer la intersección por ejemplo si nos dijera calcula la probabilidad de que ocurra el suceso A y B)

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{40}$$

***Unión de sucesos:** $A \cup B$ es el suceso formado por todos los elementos de A y de B
Para calcularlo se aplica lo siguiente $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Ejemplo
P(A)= Sacar en la baraja española una carta de oros
P(B)= Sacar en la baraja española una figura
Hallar $P(A \cup B)$
En el ejemplo anterior tenemos todas las probabilidades necesarias halladas para este ejercicio.
Nos están pidiendo la probabilidad de que la carta sea de A **o** B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \frac{3}{40} = \frac{10 + 12 - 3}{40} = \frac{19}{3}$$

EXPERIENCIAS COMPUESTAS

"Sacar dos cartas de una baraja española" es una **experiencia compuesta** de dos experiencias simples "sacar una carta" y "sacar otra carta".

Ejemplo: probabilidad le da sacar una carta que sea de oros y después sacar una carta que sea de copas. Para hallar la probabilidad total, es decir, la probabilidad de que se cumplan los dos sucesos se multiplica la probabilidad del primer suceso por la probabilidad del segundo suceso. Pueden darse dos modalidades:

1) **Extracciones con reemplazamiento:** son aquellas en las que después de cada extracción, el elemento extraído se devuelve al conjunto. Esto implica que cada extracción se realiza en las mismas condiciones que la anterior.

2) **Extracciones sin reemplazamiento:** las sucesivas extracciones se realizan sin devolver el elemento anteriormente extraído. Las condiciones de la extracción son distintas cada vez y dependen de los elementos extraídos anteriormente.

Ejemplo: Según el ejemplo previo, sacar una carta de oros y después una carta de copas. Dada una baraja española hallar:

a) Hallar la probabilidad de sacar una carta de oros y después una de copas **con reemplazamiento**

Probabilidad de sacar una carta y sea oros $\frac{10}{40}$

Probabilidad de volver a sacar una carta y sea copas $\frac{10}{40}$

Probabilidad total: $\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}=\frac{100}{1600}=\frac{1}{16}=0,0625$ Probabilidad de sacar una carta de oros y después una de copas, devolviendo la primera al mazo.

b) Hallar la probabilidad de sacar una carta de oros y después una de copas **sin reemplazamiento**

Probabilidad de sacar la primera carta oros $\frac{10}{40}$

Probabilidad de sacar en la segunda carta copas $\frac{10}{39}$, se divide de 39 ya que tenemos una carta menos en el mazo.

Probabilidad total: $\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{39}=\frac{100}{1560}=\frac{5}{78}=0,0641$ Probabilidad de sacar una carta de oros y después una de copas, sin devolver la primera al mazo.

EXPERIENCIAS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Dos o más experiencias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás.
Dos o más experiencias son **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

La probabilidad es una función que asigna a cada suceso A de E un número real P(A), que cumple los siguientes axiomas:

$$1^{o})\ 0\le P(A)\le 1$$
$$2^{o})\ P(E)=1$$
$$3^{o})\ P(A\cup B)=P(A)+P(B) \qquad \text{si } A\cap B=\varnothing \ \text{(sucesos incompatibles)}$$

Consecuencias:

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \qquad \text{si } A\cap B\ne\varnothing \ \text{(sucesos compatibles)}$$
$$P(A)\le P(B) \qquad \text{si } A\subset B$$