MATEMÁTICAS
2º ESO

$f(x)$

ACADEMIA TAMARGO, S.L.U.

SÍGUENOS EN:

ACADEMIA TAMARGO, S.L.U.

Índice de contenidos

CONTENIDO

NÚMEROS REALES 6
CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES 6
OPERACIONES CON NÚMEROS REALES 7
DIVISIBILIDAD 7
CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD 8
MÁXIMO COMÚN DIVISOR 8
MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO 8
POTENCIAS 8
CONSIDERACIONES SOBRE LAS POTENCIAS 9
OPERACIONES CON POTENCIAS 9
RADICALES 9
RADICALES EQUIVALENTES 10
REDUCIR RADICALES A ÍNDICE COMÚN 10
EXTRAER FACTORES DEL RADICAL 10
INTRODUCIR FACTORES EN EL RADICAL 10
SUMA Y RESTA DE RADICALES 10
MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RADICALES 11
POTENCIAS Y RAÍCES DE RADICALES 11
RAZONES DE DOS NÚMEROS 11
PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS RAZONES 12
OPERACIONES CON FRACCIONEs 12
APROXIMACIONES Y ERRORES 13
CALCULO DE FRACCIONES GENERATRICES 14
NOTACIÓN CIENTÍFICA 15
JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES 16
POLINOMIOS 16
ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO 18
ECUACIONES 18
RESOLUCIÓN ECUACIONES DE PRIMER GRADO 18
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CONDENOMINADORES. 18
ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA 18
TIPOS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO 18

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO 20

RESOLUCIÓN POR MÉTODOS ALGEBRAICOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO.... 20

RESOLUCIÓN POR MÉTODOS GRÁFICOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO 22

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES 23

REGLA DE TRES DIRECTA 23

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES 24

REGLA DE TRES INVERSA 24

REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES 25

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES 25

PORCENTAJES 26

DESCUENTO PORCENTUAL 26

INCREMENTO PORCENTUAL 27

ESCALAS: PLANOS Y MAPAS 27

FIGURAS PLANAS PROPIEDADES MÉTRICAS 27

PROPIEDADES MÉTRICAS DE LAS FIGURAS PLANAS. 27

FIGURAS PLANAS 30

CUERPOS GEOMÉTRICOS 31

EXPRESIÓN GRÁFICA 32

DEFINICIONES PREVIAS 32

CONSTANTES Y VARIABLES 32

DOMINIO Y RECORRIDO 33

SIMETRÍAS 33

PERIODICIDAD 34

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO 34

MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN 34

FUNCIÓN CONSTANTE $\boxed{y=k}$ 35

FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA (F. LINEAL) $\boxed{y=mx}$ 35

ESTADÍSTICA 36

POBLACIÓN O MUESTRA 36

TIPOS DE VARIABLES 37

MEDIDAS DE DISTRIBUCIÓN CENTRAL (MEDIA, MEDIANA Y MODA) 37

MEDIDAS DE POSICIÓN: CUANTILES 39

MEDIDAS DE DISPERSIÓN 40

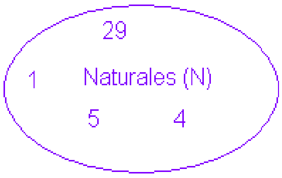
GRÁFICOS ESTADÍSTICOS 41

NÚMEROS REALES

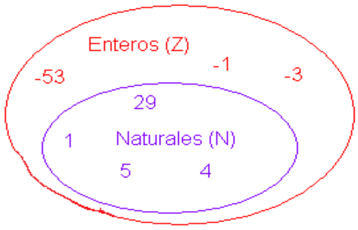
CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

Números Naturales(N): Son los que permiten contar los elementos de un conjunto.

Con ellos podemos contar los elementos de un conjunto, expresar la posición u orden de un elemento e identificar y diferenciar los diferentes elementos del conjunto. Dependiendo de los autores el 0 se puede considerar natural o no.

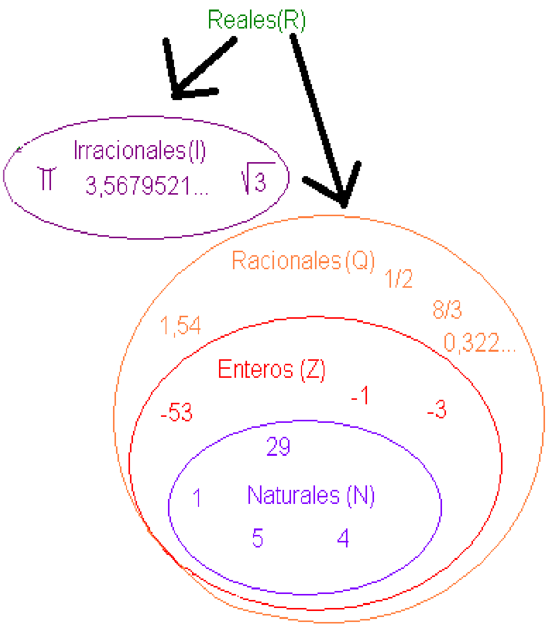


Números Enteros (Z): Contiene a los números naturales a sus opuestos y al cero.



Llamaremos Número real a un número que puede ser racional (Q)(números que pueden expresarse como fracción) o irracional (I)(números que no pueden expresarse como cociente exacto de dos números enteros). Por consiguiente, el conjunto de los números reales es la unión del conjunto de números racionales y el conjunto de números irracionales.

- El conjunto de los números reales es el conjunto de todos los números que corresponden a los puntos de la recta.
- Al conjunto de los números reales es el conjunto de todos los números que pueden expresarse con decimales infinitos periódicos o no periódicos. El conjunto de los números reales es denotado por R.



Nota: En la Figura anterior vemos como cada grupo engloba al anterior. Menos en el caso de los números Irracionales

Ejemplo: El número 5 es natural (N), Entero (Z), Racional (Q) y Real(R)

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

En el conjunto de los números reales se encuentran definidas cuatro operaciones básicas que son: la adición, la multiplicación, la sustracción y la división.

ADICIÓN DE NÚMEROS REALES

Adición de números reales: es una operación que asocia a cada par de números reales a y b, llamados sumandos, un único número real c, llamado suma de a y b la adición es una función definida así:

$\boxed{a+b=c}$ Ejemplo: $3+5=8$

SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS REALES

Sustracción de números reales: Es la operación inversa de la adición, mientras en la adición se dan los sumandos y se trata de calcular la suma.

En la sustracción se da el minuendo y el sustraendo y se trata de calcular la diferencia:

$\boxed{m-s=d}$ Ejemplo: $3{,}52-2{,}1=1{,}42$

MULTIPLICACIÓN

Multiplicación de números reales: es una operación que asocia a cada par de números reales a y b, llamados factores; un único número real c, llamado producto de a y b. La multiplicación es una función definida así:

$\boxed{a\times b=c}$ Ejemplo: $\frac{3}{2}\times\frac{7}{2}=\frac{21}{4}$

DIVISIÓN

División de números reales: es la operación inversa de la multiplicación, mientras en la multiplicación se dan los factores y se trata de calcular el producto. En la división se da el producto llamado ahora dividendo y un factor llamado ahora divisor y se trata de calcular el otro factor, llamado cociente.

$\boxed{\frac{dividendo}{divisor}=cociente}$ Ejemplo: $\frac{6}{3}=2$

Nota: Recordemos que la fórmula de la prueba de la división era:

Dividendo = divisor x cociente + resto

DIVISIBILIDAD

Un número es divisible por otro cuando la división del primero por el segundo es exacta

Múltiplos- Un número se dice que es múltiplo de otro cuando es el resultado de multiplicar
Divisores-Se dice que un número es divisor de otro cuando lo divide exactamente
Número primo- Es aquel que sólo es divisible por si mismo o por la unidad.

(Para averiguar si un número es primo se divide ordenadamente por todos los números primos menores que él. Cuando sin resultar divisiones exactas, se va a obtener un cociente menor o igual al divisor, se dice que el número es primo.)

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Divisibilidad por 2- Un número es divisible por 2 cuando termina en 0 o cifra par
Divisibilidad por 3- Un número es divisible por 3 cuando lo es la suma de sus cifras
Divisibilidad por 4- Un número es divisible por 4 cuando las dos últimas cifras de la derecha son ceros o forman un número múltiplo de 4
Divisibilidad por 5- Un número es divisible por 5 si termina en 0 o en 5
Divisibilidad por 11- Un número es divisible por 11 cuando lo es la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan el lugar par y la suma de las cifras que ocupan el lugar impar. También lo es cuando da 0.
Divisibilidad por 10,100,1000....- Un número es divisible por 10,100,1000... si termina en 1,2,3,...ceros , sucesivamente

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

M.C.D. de varios números es el mayor número que divide a todos exactamente.

El M.C.D. es el producto de los factores comunes a todos los números con el menor exponente con que figuren.

Ejemplo: En una boda han asistido 140 adultos y 42 niños. Se quieren hacer mesas iguales los más grandes posibles sin mezclar niños y adultos

$$\left.\begin{aligned}140 &= 2^2 \cdot 5 \cdot 7\\ 42 &= 2 \cdot 3 \cdot 7\end{aligned}\right\} M.C.D. = (comunes\ al\ menor\ exponente)\ 2 \cdot 7 = 14\ comensales\ por\ mesa$$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

m.c.m. es el más pequeño de los múltiplos comunes

m.c.m. es el producto de los factores comunes y no comunes al mayor exponente.

Ejemplo Tres autobuses acaban de coincidir en una parada, si sabemos que uno pasa cada 12 minutos, otro cada 18 min. y otro cada 34 min. ¿En cuánto tiempo volverán a coincidir?

$$\left.\begin{aligned}12 &= 2^2 \cdot 3\\ 18 &= 2 \cdot 3^2\\ 34 &= 2 \cdot 17\end{aligned}\right\} m.c.m. = (comunes\ y\ no\ comunes\ al\ mayor\ exponente)\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17 = 612\ min.$$

612 minutos, es decir coincidirán cada 10 horas y 12 minutos.

POTENCIAS

Potencia de un número: Muestra cuantas veces se usa el número en una multiplicación. Donde al número se le llama base y a las veces que se repite exponente.

Ejemplo: 2^3 = 2x2x2 (la base es 2 y el exponente 3).

CONSIDERACIONES SOBRE LAS POTENCIAS

1) Toda potencia de exponente 1 es igual a la base.
   Ejemplo : $a^1 = a$; $3^1=3$

2) Toda potencia de exponente 0, es igual a la unidad.
   Ejemplo: $a^0 = 1$; $3^0=1$

3) Toda potencia de base uno es igual a la unidad.
   Ejemplo: $1^3 =1x1x1=1$

4) Para obtener potencias de base 10, se escribe la unidad seguida de tantos ceros, como unidades tiene el exponente.

   Ejemplo: $10^3=1000$

5) Al elevar los dos miembros de una igualdad a una potencia, resulta otra igualdad.
   $a = b \Rightarrow a^3 = b^3$

OPERACIONES CON POTENCIAS

1. **El producto de potencias de igual base**, es otra potencia que tiene la misma base y como exponente, la suma de los exponentes.

   $a^m \times a^n = a^{m+n}$ Ejemplo: $3^2 \times 3^3 = 3^5$

2. **El cociente de potencias de la misma base**, es otra potencia que tiene la misma base, y como exponente, la diferencia de los exponentes.
   $a^m : a^n = a^{m-n}$ Ejemplo: $3^3 : 3^2 = 3^{3-2} = 3^1 = 3$

3. **El producto de potencias del mismo exponente**, es otra potencia que tiene el mismo exponente y, como base, el producto de las bases.
   $a^m \times b^m \times c^m = (a \times b \times c)^m$ Ejemplo: $2^3 \times 3^3 \times 10^3 = 60^3$

4. **El cociente de potencias del mismo exponente**, es otra potencia que tiene el mismo exponente y como base, el cociente de las bases.
   $a^m : b^m = (a / b)^m$ Ejemplo: $12^3 : 3^3 = 4^3$

5. **La potencia de una potencia**, es otra potencia que tiene la misma base y como exponente el producto de los exponentes.
   $(a^m)^n = a^{m \times n}$ Ejemplo: $(3^3)^2 = 3^6$

RADICALES

Los radicales son expresiones de la forma:
$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ $\sqrt[3]{2^2} = 2^{2/3}$

RADICALES EQUIVALENTES

Si se multiplica o divide el índice y el exponente de un radical por un mismo número natural, se obtiene otro radical equivalente.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k.n]{a^{m.k}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n/k]{a^{m/k}}$$

REDUCIR RADICALES A ÍNDICE COMÚN

Vamos a explicarlo mediante un ejemplo.

$$\sqrt{2}\ ;\ \sqrt[3]{2^2};\ \sqrt[4]{3^3}$$

Hallamos el m.c.m. de los índices de las raíces, obteniendo el índice común.
m.c.m. (2, 3, 4) = 12

Seguidamente dividimos el índice común por cada uno de los índices de las raíces. Y multiplicamos el resultado obtenido por el exponente del radicando

$\sqrt[12]{2^6}\ ;\ \sqrt[12]{2^8}\ ;\ \sqrt[12]{3^9}$

EXTRAER FACTORES DEL RADICAL

Para extraer factores se descompone el radicando en factores. Si:

- Un exponente es menor que el índice, el factor correspondiente se deja en el radicando.
  $\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3}$
- Un exponente es igual al índice, el factor correspondiente sale fuera del radicando
  $\sqrt[4]{2^4} = 2$
- Un exponente es mayor que el índice, se divide dicho exponente por el índice. El coeficiente obtenido es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando.

$\sqrt{96} = \sqrt{2^5\, x\, 3} = 2^2\sqrt{2\, x\, 3} = 2^2\sqrt{6}$

5 | 2
1   2

Exponente del factor fuera del radical

Exponente del factor dentro del radical

INTRODUCIR FACTORES EN EL RADICAL

Para introducir factores en el radical, los elevamos al índice correspondiente.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\, x\, b}$$

Ejemplos: $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$ $\qquad$ $\mathbf{5^3\sqrt{3} = \sqrt{5^{2\cdot 3} \cdot 3} = \sqrt{46875}}$

SUMA Y RESTA DE RADICALES

Solamente pueden sumarse o restarse dos radicales cuando son radicales semejantes, es decir, si son radicales del mismo índice e igual radicando.

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} = (a+b)\sqrt[n]{k}$$

$$3\sqrt[4]{5} + 6\sqrt[4]{5} = 9\sqrt[4]{5}$$

Si el radicando es distinto se descompone en factores y se extraen los factores que se puedan de la raíz y luego sumamos o restamos los que tengan el mismo radicando.

$$5\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{75} \rightarrow 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2^2\,x\,3} - \sqrt{5^2\,x\,3} \rightarrow 5\sqrt{3} + 3\,x\,2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \rightarrow$$
$$\rightarrow \cancel{5\sqrt{3}} + 6\sqrt{3} - \cancel{5\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RADICALES

Para multiplicar o dividir radicales hay que tener en cuenta si son del mismo índice o diferente. En el caso de las multiplicaciones, si tienen el mismo índice, se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,.\,b}$$
$$\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$$

Si las raíces son de distinto índice se reducen a índice común y luego operamos.

$$\sqrt{3}\,.\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3}\,.\,\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3\,.\,2^2}$$

En el caso de la división, si tienen el mismo índice, se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \rightarrow Ejemplo \rightarrow \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

Si por el contrario, las raíces son de distinto índice, se deben reducir a índice común y posteriormente dividir los radicandos.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{2^2}}$$

POTENCIAS Y RAÍCES DE RADICALES

Cuando tenemos un radical elevado a una potencia, se eleva el radicando a esa potencia y se deja el mismo índice.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^7 = \sqrt[3]{5^7} = 5^2 \cdot \sqrt[3]{5}$$

La raíz de un radical es otra raíz de igual radicando y cuyo índice el producto de los dos índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\,.\,m]{a}$$
$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{\mathbf{5}}} = \sqrt[6]{\mathbf{5}}$$

RAZONES DE DOS NÚMEROS

Razón-Razón de dos números es el cociente indicado de ambos

Se compone de dos términos a y b de los cuales a es el denominador y b es el numerador. $\frac{a}{b}$

Razón de a y b

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS RAZONES

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$ El producto de los medios es igual al producto de los extremos

OPERACIONES CON FRACCIONES

SUMA/RESTA DE DOS O MAS FRACCIONES

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6}$$

1) Hacemos mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\left.\begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 4 = 2 \cdot 2 = 2^2 \\ 5 = 5 \end{array}\right\} \text{m.c.m.} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

2) *PONEMOS EL M.C.M. COMO DENOMINADOR COMÚN A TODAS LAS FRACCIONES. Y DIVIDIMOS EL M.C.M. POR EL DENOMINADOR INICIAL DE CADA FRACCIÓN Y MULTIPLICAMOS POR EL NUMERADOR INICIAL DE CADA FRACCIÓN.*

En nuestro ejemplo.
60 : 3 = 20
60 : 4 =15
60 : 6 = 10

$$\frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 3 - 10 \cdot 5}{60}$$

3) *OPERAMOS*

$$\frac{20 + 45 + 50}{60} = \frac{115}{60} = \frac{23}{12}$$

MULTIPLICACIONES DE FRACCIONES

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

Multiplicamos los numeradores de cada fracción entre si y nos da el numerador de la fracción resultado a continuación multiplicamos los denominadores entre si y nos da el denominador de la fracción resultado.

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{8}{30}$$

En este caso podemos simplificar dividiendo entre 2 para que nos quede una fracción más manejable y nos quedaría $\frac{4}{15}$. Si nos damos cuenta esta operación ya la podíamos hacer antes ya que un 2 que multiplica y uno que divide se van.

DIVISIONES DE FRACCIONES

$$\frac{1}{3}:\frac{2}{5}$$

Multiplicas en cruz. Empiezas y acabas en el mismo lugar, imaginemos que es una bola de billar; Si empiezas por **el numerador** de la primera fracción vas al denominador de la segunda fracción "rebota" y llegas **al numerador** de la fracción resultado.

$$\frac{1}{3}:\frac{2}{5} = \frac{1\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{5}{6}$$

NOTA: Hay veces que se prefiere cambiar el numerador por el denominador en la segunda fracción y multiplicar

APROXIMACIONES Y ERRORES

Aproximar un número a ciertas cifras decimales: Consiste en encontrar un número con las cifras pedidas, que esté muy próximo al número dado.

1. **Aproximación por defecto**, buscamos el número con un determinado número de cifras que es inmediatamente menor que el dado.

2. **Aproximación por exceso**, es el número con las cifras decimales fijadas inmediatamente mayor al dado.
   Por ejemplo, dado el número 2.7456 vamos a aproximarlo con dos cifras decimales:
   a) por defecto es 2.74
   b) por exceso es 2.75
   Al dar la aproximación en lugar del número se comete un error, en el ejemplo anterior los errores que se cometen son:
   a) | 2.7456 - 2.74 | = 0.0056
   b) | 2.7456 - 2.75 | = 0.0044

3. **Redondear** un número consiste en dar la mejor de las aproximaciones, es decir, aquella con la que se comente un error menor, en nuestro caso si redondeamos 2.7456 a dos cifras decimales, el redondeo será 2.75. Porque la siguiente cifra a la que hacemos la aproximación es mayor o igual que 5.O por ejemplo si fuera 2.742 el redondeo sería 2,74.Porque la siguiente cifra a la que queremos hacer la aproximación es menor que 5.

En la siguiente tabla tenemos casos de aproximaciones y redondeo

Número	Expresión decimal	Aproximación por defecto	Aproximación por exceso	Redondeo
2/3	**0,666666666**	**0,66(dos cifras decimales)**	**0,67(dos cifras decimales)**	**0,67(dos cifras decimales)**
4/3	**1,333333333**	**1,33(dos cifras decimales)**	**1,34(dos cifras decimales)**	**1,33(dos cifras deicmales)**
	23,45278394	**23,4(una cifra decimal)**	**23,5(una cifra decimal)**	**23,5(una cifra decimal)**

ERROR ABSOLUTO $E_a = |V_r - V_{ap}| \begin{cases} E_a = \text{Error absoluto} \\ V_r = \text{Valor real} \\ V_{ap} = \text{Valor aproximado} \end{cases}$

ERROR RELATIVO $E_r = \dfrac{E_a}{V_r} \begin{cases} E_r = \text{Error relativo} \\ E_a = \text{Error absoluto} \\ V_r = \text{Valor real} \end{cases}$

NOTA: La cota de error de un redondeo de orden n es media unidad de ese orden.

CALCULO DE FRACCIONES GENERATRICES

DECIMALES EXACTO

La fracción generatriz de un decimal exacto es una fracción que tiene por numerador al número, escrito sin coma decimal, y por denominador un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tiene.

$$0{,}24 = \frac{24}{100}$$

DECIMALES PERIÓDICOS PUROS

Consideramos al decimal $4{,}\overset{\frown}{31}$= 4,31313131, al que llamaremos x.

X= 4,3131313131…..

Si multiplicamos los dos miembros por 100 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene el período) obtenemos:

100x = 431,31313131….

Restando miembro a miembro las dos igualdades:

$$\begin{array}{r} 100x = 431'313131\ldots \\ x = \quad 4'313131\ldots \\ \hline 99x = 431 - 4 \end{array} \qquad x = \frac{427}{99}$$

La fracción generatriz de un decimal periódico puro es una fracción que tiene por numerador al propio número, escrito sin los signos coma y periodo, menos el número formado por las cifras anteriores a la coma. Por denominador tiene tantos nueves como cifras decimales hay en el periodo.

También podemos hallar la fracción generatriz por la anterior definición. Que es un método más rápido aunque a nuestro entender más difícil de que nos acordemos en un futuro.

DECIMALES PERIÓDICOS MIXTOS

Consideramos el decimal $1{,}0\overset{\frown}{63}$ al que llamamos x:

X= 1,06363636363….

Si multiplicamos los dos miembros por 10 (un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales haya antes del periodo) obtenemos el decimal periódico puro:

10x= 10,63636363…

Multiplicamos los dos miembros de la igualdad obtenida por 100 (un unos seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el periodo) y obtenemos:

1000x= 1063,63636363…

Restando las dos últimas igualdades:

$$\begin{array}{rl} 1000x = & 1063'636363..... \\ 10x = & 10'636363..... \\ \hline 990x = & 1063 - 10 \end{array} \qquad x = \frac{1053}{990}$$

La fracción generatriz de un decimal periódico mixto es una fracción que tiene por numerador al propio número, escrito sin los signos coma periodo, menos el número formado por las cifras anteriores al periodo quitándole la coma. Por denominador tiene tantos nueves como cifras hay en el periodo seguidos de tantos ceros como cifras hay entre la coma y el periodo.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Notación científica: es un modo conciso de representar un número utilizando potencias de base diez. Esta notación se utiliza para poder expresar fácilmente números muy grandes o muy pequeños.

Los números se escriben como un producto: $\boxed{a \times 10^n}$

Siendo:

a: un número entero o decimal mayor o igual que 1 y menor que 10, que recibe el nombre de **mantisa**.

n: un número entero, que recibe el nombre de **exponente** u **orden de magnitud**.

Ejemplo: 254 000 000 000 $= 2{,}54 \times 10^{11}$

ESCRITURA

- $10^0 = 1$
- $10^1 = 10$
- $10^2 = 100$

10 elevado a u**n**a potencia entera negativa $-n$ es igual a $1/10^n$:

- $10^{-1} = 1/10 = 0{,}1$
- $10^{-3} = 1/1\,000 = 0{,}001$
- $10^{-9} = 1/1\,000\,000\,000 = 0{,}000\,000\,001$

Por tanto, un número como: 156 234 000 000 000 000 000 000 000 000 puede ser escrito como $1{,}56234 \times 10^{29}$,y un número pequeño como 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 939 kg *(masa de un electrón)* puede ser escrito como 9.10939×10^{-31}kg.

JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

1. **Paréntesis de los interiores a los exteriores**
2. **Potenciación y radicación según encontremos de izquierda a derecha.**
3. **Multiplicación y división según encontremos de izquierda a derecha**
4. **Sumas y restas.**

POLINOMIOS

MONOMIO: es un producto un número por una o varias letras. El número se llama coeficiente y las letras parte literal.

Ej. $3x$

GRADO DE UN MONOMIO: es la suma de los exponentes de las letras. Los números sin parte literal son monomios de grado 0

MONOMIOS SEMEJANTES: son los que tienen idéntica la parte literal.

Ej. $2x^2$ y $3x^2$

SUMA Y RESTA DE MONOMIOS SEMEJANTES: se suman (restan) los coeficientes.

Ej. $2x^2+3x+5-3x^2+5x-1=2x^2-3x^2+3x+5x+5-1=-x^2+8x+4$

PRODUCTO (DIVISIÓN) DE MONOMIOS: se multiplican (dividen) los coeficientes y la parte literal (fórmulas de potencias).

Ej. $\dfrac{8x^5}{4x^2}=2x^{5-2}=2x^3$

POLINOMIO: es una suma de monomios.

Ej. $3x^3-2x+7$

POLINOMIO COMPLETO: es el que tiene todos los monomios desde el de mayor grado hasta el término independiente.

GRADO DE UN POLINOMIO: es el grado del monomio de mayor grado. Al coeficiente del monomio que nos dice el grado del polinomio se llama coeficiente principal., el coeficiente del polinomio de grado cero se llama término independiente.

Ej. $3x^3\cdot y^2+5x^3\cdot y-2x^2-5\,y^2$ El grado de este polinomio es 5

NOTA: Para obtener el valor del grado de los diferentes monomios, se suman todos los exponentes de las diferentes letras que existan en cada monomio. A continuación para obtener el grado del polinomio se comparan esas sumas y se busca la mayor, obteniéndose el grado del polinomio.

SUMA DE POLINOMIOS: se colocan uno a continuación del otro y se suman los monomios semejantes.

Ej. $(x^2-2x+5)+(3x^2-1)=4x^2-2x+4$

RESTA DE POLINOMIOS: se le suma al polinomio minuendo el polinomio sustraendo con todos los signos cambiados.

Ej. $(x^2-2x+5)-(3x^2-1)=-2x^2-2x+6$

PRODUCTO DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO: se multiplica el monomio por cada uno de los monomios del polinomio y se suman los monomios resultantes.

Ej. $3\cdot\left(2x^3-3x\right)=6x^3-9x$

PRODUCTO DE POLINOMIOS $P(x)\cdot Q(x)$**:** Es la suma del producto de cada uno de los monomios del polinomio $P(x)$ por cada uno de los monomios de $Q(x)$.

Ej. $(x+2)\cdot\left(2x^2-3x+5\right)=2x^3-3x^2+5x+4x^2-6x+10=2x^3+x^2-x+10$

VALOR NUMÉRICO DEL POLINOMIO PARA $x=a$ **:** es el número que resulta de sustituir la x por a en el polinomio. Si el valor numérico del polinomio resulta cero se dice que a es una raíz del polinomio.

Ej. $-3x^2+2x-1=-3\cdot 2^2+2\cdot 2-1=-12+4-1=-9$

PRODUCTOS O IDENTIDADES NOTABLES

El cuadrado de la suma de dos números, es igual al cuadrado del primero, más el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$\boxed{(a+b)^2=(-a-b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

Ejemplo-1:

$$(3+4)^2=3^2+2\cdot 3\cdot 4+4^2=9+24+16=49$$

$$\text{como se puede observar es lo mismo que } (3+4)^2=7^2=49$$

Ejemplo-2:

$$(3x+5)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 5+5^2=9x^2+30x+25$$

El cuadrado de la diferencia de dos números, es igual al cuadrado del primero, menos el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$\boxed{(a-b)^2=(-a+b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

Ejemplo-1:

$$(5-3)^2=5^2+3^2-2\cdot 3\cdot 5=25+9-30=4$$

$$\text{como se puede observar es lo mismo que } (5-3)^2=2^2=4$$

Ejemplo-2:

$(3x-5)^2=9x^2-2\cdot 3x\cdot 5+25=9x^2-30x+25$

La diferencia de los cuadrados de dos números, es igual al producto de la suma por la diferencia de los dos números.

$$\boxed{a^2-b^2=(a+b)\times(a-b)}$$

Ejemplo: $9x^2-4=(3x+2)(3x-2)$

ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

ECUACIONES

ECUACIÓN: es la igualdad de dos expresiones algebraicas no equivalentes.

Ejemplos: $2x+3 = x-2$

$x^2-5x = 2x-1$

RESOLUCIÓN ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Regla de la suma: Si a los 2 miembros de una ecuación se le suma o resta el mismo número o la misma expresión a ambos lados de la igualdad la ecuación no varía.

Regla del producto: Si multiplicamos y dividimos los 2 miembros por un número distinto de 0, obtenemos una ecuación equivalente.

$$3x+2-x=2x+8-6-5x-10$$

Operamos términos semejantes.

$$2x+2=-3x-8$$

$$2x+3x=-8-2$$

Términos con x a un lado de la igualdad y término independientes al otro. Los elementos que están sumando pasan restando y viceversa.

$$5x=-10;$$

$$x=\frac{-10}{5}$$

$$x=-2$$

Operamos para dejar la incógnita sola, a un lado de la igualdad. El coeficiente que está multiplicando a la incógnita, pasa al otro lado de la igualdad dividiendo

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CONDENOMINADORES.

$$\frac{3x+1}{2}-\frac{x-1}{3}+2=27$$

$$m.c.m=6$$

$$\frac{3(3x+1)}{6}-\frac{2(x-1)}{6}+\frac{12}{6}=\frac{162}{6};$$

$$3(3x+1)-2(x-1)+12=162$$

$$9x+3-2x+2+12=162$$

$$7x+17=162$$

$$7x=145 \Rightarrow x=\frac{145}{7} \Rightarrow x=20,71$$

1) hallamos el m.c.m. de los denominadores

2) dividimos el m.c.m. entre el denominador de cada fracción y lo multiplicamos por el numerador.

3) A partir de este momento ya se resuelve como una ecuación siguiendo los pasos anteriores.

NOTA: Un número o signo delante de un paréntesis, afecta a todo el paréntesis.

Sol.: $\boxed{x=20,71}$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA

Ecuación de segundo grado con una incógnita es aquella que, una vez realizadas todas las transformaciones y reducciones posibles queda de la forma: $ax^2+bx+c=0$. Pudiendo ser nulo algún término o incluso dos, menos el de x^2.

TIPOS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Para resolver las ecuaciones de segundo grado, utilizamos diferentes métodos según sea el tipo.

COMPLETAS

Como su propio nombre indica son aquellas que tienen todos los términos de la ecuación y son de la forma: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

Para resolverla se utiliza la siguiente fórmula: $\boxed{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Ejemplo: $x^2 - 5x + 6 = 0$ para la fórmula utilizamos los coeficientes $\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases}$

NOTA: Os aconsejamos, definir claramente los coeficientes sobre todo al principio para evitar posibles errores.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \begin{cases} = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$Soluciones \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

INCOMPLETAS

- Si b=0

La ecuación es del tipo $ax^2+c=0$. Es decir, tiene término en x^2 y término independiente.
Este tipo se resuelve:

$$ax^2 - c = 0 \rightarrow ax^2 = c \rightarrow x^2 = \frac{c}{a} \rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}}$$

Ejemplo:

$$-3x^2 + 27 = 0$$
$$-3x^2 = -27$$
$$3x^2 = 27$$
$$x^2 = \frac{27}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \begin{cases} +3 \\ -3 \end{cases}$$

NOTA: recordemos que delante de la raíz siempre hay un signo más y uno menos.

- Si c=0

La ecuación es del tipo $ax^2+bx=0$. Es decir, tiene término en x^2 y término en x.

1. Se saca factor común a la x $x \cdot (ax + b) = 0$
2. Se iguala miembro a miembro a 0

$\boxed{x = 0}$ $\qquad \boxed{ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{a}}$

Ejemplo:

$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0$$
$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$Soluciones \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

SISTEMAS DE ECUACIONES: son conjuntos de ecuaciones que deben verificarse para unos mismos valores de incógnitas

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} x + 3y = 2 \\ 2x + 5y = 3 \end{array}\right\}$

RESOLUCIÓN POR MÉTODOS ALGEBRAICOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Sustitución Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra. De esta forma queda una ecuación con una sola incógnita, que se resolverá.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 11 \end{array}\right\}$

Se elige una incógnita para despejar en una de las ecuaciones, en este caso se escogióx en la primera ecuación.

NOTA: se escogió x en la primera ecuación ya que es la incógnita más fácil de despejar al no quedar denominadores, en la expresión despejada. Es importante pensar que incógnita vamos a despejar, y en que ecuación para que las operaciones después sean más sencillas.

Se obtiene: $x = 7 - 2y$

Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación. En este caso, en la segunda ecuación, se sustituye la "x" por la expresión obtenida en la primera ecuación.

$$2 \cdot (7 - 2y) + 3y = 11$$

Se opera para conseguir el valor de la "y"

$$14 - 4y + 3y = 1$$
$$-y = 11 - 14$$
$$-y = -3$$
$$y = 3$$

Una vez conocido el valor de una incógnita se sustituye en la expresión despejada, aunque también es totalmente correcto sustituir en las ecuaciones iniciales.

En este ejemplo el valor de "y" hallado, lo sustituimos en la ecuación despejada

$$x = 7 - 2 \cdot 3$$
$$x = 7 - 6$$
$$x = 1$$

$$Sol.\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Reducción: Se multiplican si es necesario los miembros de una de las ecuaciones *(o de las dos)*, por un número, de tal forma que el coeficiente de una incógnita sea en las dos ecuaciones igual pero de distinto signo. Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones, se elimina la incógnita que tiene el mismo coeficiente, lo cual permite calcular el valor de la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido en una cualquiera de las ecuaciones iniciales.

Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 2x + 3y &= 11 \end{aligned}\right\}$$ multiplicamos la primera ecuación por -2, así los coeficientes de una incógnita son iguales pero diferente signo

Sumamos $$\left.\begin{aligned} -\cancel{2x} - 4y &= -14 \\ +\cancel{2x} + 3y &= +11 \end{aligned}\right\}$$ miembro a miembro

$$-y = -3$$
$$y = 3$$

Sustituimos el valor de la incógnita en la primera ecuación

$$x + 2 \cdot 3 = 7$$
$$x = 7 - 6$$
$$x = 1$$

$$Sol.\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 2x + 3y &= 11 \end{aligned}\right\}$$

Se despeja la misma variable en las dos ecuaciones. En este ejemplo se escoge la variable x por ser más simple, al no quedar en una de las ecuaciones denominadores.

$$x + 2y = 7$$
$$x = -2y + 7$$

$$2x + 3y = 11$$
$$2x = -3y + 11$$
$$x = \frac{-3y + 11}{2}$$

Igualamos las dos expresiones obtenidas.

$$-2y+7=\frac{-3y+11}{2}$$
$$-4y+14=-3y+11$$
$$-4y+3y=11-14$$
$$-y=-3;\ y=3$$

Una vez que tenemos una variable sustituyendo en cualquiera de las expresiones despejadas.

$$x=-2\cdot 3+7=1$$

$$Sol.\begin{cases} y=3 \\ x=1 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN POR MÉTODOS GRÁFICOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Se trata de dibujar las rectas que son la representación gráfica de las dos ecuaciones lineales. De esta manera, las coordenadas del punto de intersección de dichas rectas, son las soluciones (x e y) del sistema.

Ejemplo: $$\left.\begin{array}{r} 3x-y=-5 \\ y-6x=11 \end{array}\right\}$$

1) Despejamos la "y" en ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} -y=-5-3x \\ y=11+6x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=3x+5 \\ y=6x+11 \end{array}\right\}$$

2) Se construye para cada una de las dos ecuaciones de primer grado la tabla de valores. Para ello vamos dando valores a la x *(estos valores los elegimos nosotros, procuraremos que sean valores que nos faciliten las operaciones)* y sustituimos en cada una de las ecuaciones.

$y=3x+5$

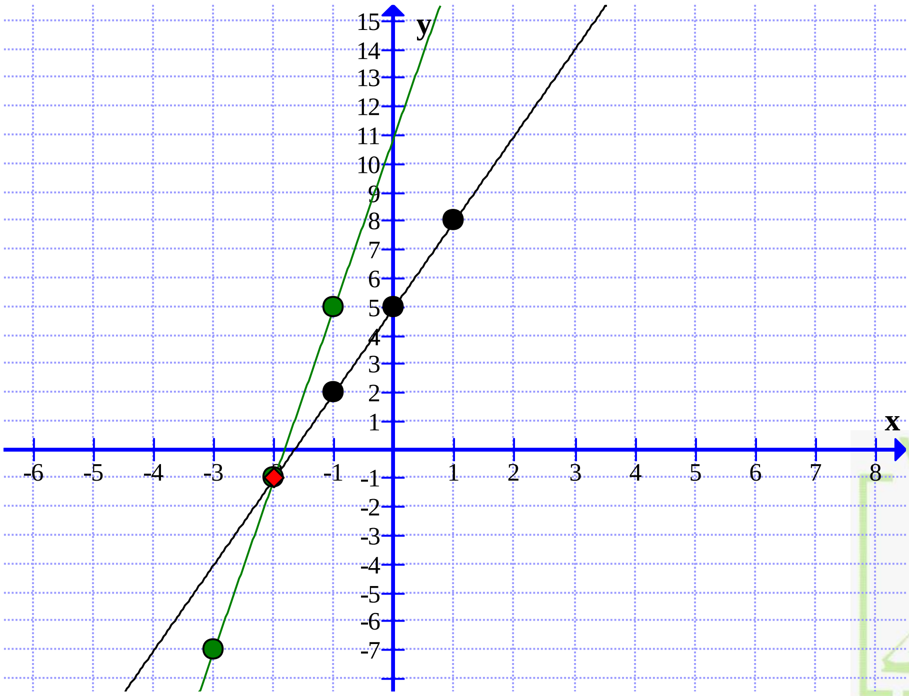
x	y
0	5
1	8
-1	2

$$y=5+3\cdot 0=5$$
$$y=5+3\cdot 1=8$$
$$y=5+3\cdot(-1)=5-3=2$$

$y=6x+11$

x	y
-3	-7
-2	-1
-1	5

3) Representamos ambas rectas en el eje de coordenadas.



4) En este último paso hay tres posibilidades:

a) Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas (x,y). "Sistema compatible determinado".
b) Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. "Sistema compatible indeterminado".
c) Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución. "Sistema incompatible".

En nuestro caso podemos ver que las rectas se cortan en el punto (-2,-1) y por lo tanto es un sistema compatible determinado.

$$Sol.\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando:

I) A una cantidad determinada de la primera la corresponde una cantidad determinada de la segunda
II) Al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por dicho número.

REGLA DE TRES DIRECTA

La regla de tres simple directa se fundamenta en una relación de proporcionalidad, por lo que:

B --------------------------- A Y --------------------------- X	$\frac{B}{A} = \frac{Y}{X} = k$ $\qquad$ $X = \frac{A \cdot Y}{B}$

Donde **k** es la constante de proporcionalidad, para que esta proporcionalidad se cumpla tenemos que a un aumento de **A** le corresponde un aumento de **B** en la misma proporción.

B es a **A** directamente, como **Y** es a **X**, siendo **X** igual al producto de **A** porY dividido entre **B**.

Ejemplo:
Una bomba de agua tarda 20 minutos en verter 4000 litros de agua. ¿Cuánto tardará en llenar una piscina de 1500 litros?

4000——— 20

1500 ———x

*Para llenar menos litros echará menos tiempo. Por lo tanto, observamos que si disminuyen los litros también disminuye el tiempo. Por tanto, es directamente proporcional.
Colocamos las magnitudes en forma de razón y despejamos la x.

$$\frac{4000}{150} = \frac{20}{x}$$

$$x = \frac{1500\ x\ 20}{4000} = 7{,}5\ minutos = 7\ minutos\ y\ 30\ segundos$$

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, cuando:

I) A una cantidad determinada de la primera le corresponde otra cantidad determinada de la segunda
II) Al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda dividida o multiplicada por dicho número.

REGLA DE TRES INVERSA

B --------------------------- A

Y --------------------------- X

En la regla de tres simple inversa, en la relación entre los valores se cumple que:

$$B \cdot A = X \cdot Y = e \qquad\qquad X = \frac{B \cdot A}{Y}$$

Donde **e** es un producto constante, para que esta constante se conserve, tendremos que un aumento de **A**, necesitara una disminución de **B**, para que su producto permanezca constante, Y viceversa.

Ejemplo:
Una cuadrilla de 6 obreros construye una casa en 12 semanas. ¿Cuánto tardarán 3 obreros trabajando en las mismas condiciones?

6 ———12

3 ——— x

*Observamos que si son menos obreros van a tardar más días. Por lo tanto, si una aumenta la otra disminuye y viceversa. Si una disminuye, la otra aumenta. Por lo tanto, es inversamente proporcional.

Colocamos las magnitudes en forma de razón y como es inversa la que no lleva x la invertimos cambiando el numerador y el denominador, y despejamos la x.

$$\frac{6}{3}=\frac{12}{x} \rightarrow \frac{3}{6}=\frac{12}{x}$$

$$x=\frac{6\ x\ 12}{3}=\frac{72}{3}=24\ semanas$$

REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Repartir un número dado M en partes directamente proporcionales a varios dados a a_1, a_2 , a_3,------es hallar otros números b_1 , b_2, b_3,------- proporcionales a ellos y cuyo total sea M

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}=......=\frac{b_1+b_2+b_3+...}{a_1+a_2+a_3+...}=\frac{M}{a_1+a_2+a_3+...}$$

Consiste en que dadas unas magnitudes de un mismo tipo y una magnitud total, calcular la parte correspondiente a cada una de las magnitudes dadas.

Vamos a resolver el siguiente ejercicio de una forma práctica.

Un padre reparte 4500 € entre sus tres hijos de 2, 5 y 8 años de edad, proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

1) Sumar los elementos sobre los que voy a repartir 2+5+8=15

2) Multiplicamos por cada edad y dividimos del total de la suma de las edades

Cada hijo recibirá:

$$Hijo\ de\ 2\ años\ \rightarrow \frac{4500}{15}\cdot 2=600€$$

$$Hijo\ de\ 5\ años\ \rightarrow \frac{4500}{15}\cdot 5=1500$$

$$Hijo\ de\ 8\ años\ \rightarrow \frac{4500}{15}\cdot 8=2400€$$

REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Repartir un número M, en partes inversamente proporcionales a varios dados a_1 , a_2 , a_3 ,… es hallar otros números b_1 , b_2, b_3,…. inversamente proporcionales a ellos, y cuya suma sea M

$$\frac{b_1}{1/a_1}=\frac{b_2}{1/a_2}=\frac{b_3}{1/a_3}=......=\frac{b_1+b_2+b_3+...}{1/a_1+1/a_2+1/a_3+....}=\frac{M}{1/a_1+1/a_2+1/a_3.....}$$

Como en el apartado anterior vamos a resolver un ejemplo de una manera más práctica.

Ejemplo. Un padre reparte 6600 € entre sus tres hijos de 2, 5 y 8 años de edad, en partes inversamente proporcionales a su edad. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

1) Tomamos los inversos de las edades

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$$

2) Reducimos a común denominador

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8} = \frac{20}{40}, \frac{8}{40}, \frac{5}{40}$$

3) Realizamos un reparto directamente proporcional a los numeradores (20, 8 y 5). Ahora es lo mismo que el apartado anterior pero haciendo el reparto directamente proporcional a 20, 8 y 5

Sumamos las edades 20+8+5=33

$$Hijo\ de\ 2\ años\ \rightarrow \frac{6600}{33} \cdot 20 = 4000€$$

$$Hijo\ de\ 5\ años\ \rightarrow \frac{6600}{33} \cdot 8 = 1600€$$

$$Hijo\ de\ 8\ años\ \rightarrow \frac{6600}{33} \cdot 5 = 1000€$$

PORCENTAJES

Un porcentaje es una razón con denominador 100. El total de una cantidad se expresa como el 100%. El 50 % equivale a la mitad de la cantidad. El 25 % es la cuarta parte de la cantidad .El 10 % es la décima parte de la cantidad.

Ejemplo:

Calcula el 23 % de 800: $800 \cdot \frac{23}{100} = 184$

Porcentajes encadenados:

Para aplicar sobre una misma cantidad dos o más porcentajes, se pasan a tantos por uno y se aplican sucesivamente-

DESCUENTO PORCENTUAL

El descuento es la diferencia entre la cantidad inicial y la cantidad final.

Si a una cantidad inicial (C_{0}) se le aplica una disminución del r %, la cantidad final (C_{f}) se calcula:

$$\boldsymbol{C_f = C_0\left(1 - \frac{r}{100}\right)}$$

Al descontarnos un r % de una cantidad inicial, la cantidad final será el (100 – x) %.

Ejemplo:

Al comprar un ordenador me ofrecen un 12 % de descuento por pagarlo al contado. He pagado 528 €. ¿Cuánto valía el ordenador sin descuento?

$$528 = C_0\left(1 - \frac{12}{100}\right) \qquad C_0 = \frac{528}{0{,}88} = 600\ €$$

Al aplicar el 12 % de descuento sólo pagaremos el 80 % de la cantidad inicial. Por lo tanto, además de la fórmula, podemos hacer el ejercicio de la siguiente forma:

100 % $\longrightarrow$ C_0

80 % $\longrightarrow$ 528

$$C_0 = \frac{528 \cdot 100}{88} = 600\ €$$

INCREMENTO PORCENTUAL

El incremento es la diferencia entre la cantidad final y la cantidad inicial, ya que el tanto por ciento aplicado se añade a la cantidad inicial.

Si a una cantidad inicial ($C_{0)}$) se le aplica un incremento del r %, la cantidad final ($C_{f)}$) se calcula:

$$\boldsymbol{C_f = C_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)}$$

Al incrementarnos un r % de una cantidad inicial, la cantidad final será el (100 + x) %.

Ejemplo:
Por no pagar una multa de 150 € me han aplicado un 12 % de recargo. ¿Cuánto he pagado al final?

$$C_f = 150\left(1 + \frac{12}{100}\right) = 150 \cdot 1{,}12 = 168\ €$$

Al aplicar el 12 % de recargo (incremento), pagaremos el 112 % de la cantidad inicial. Por lo tanto, además de la fórmula, podemos hacer el ejercicio de la siguiente forma:

100 % $\longrightarrow$ 150

112 % $\longrightarrow$ C_f

$$C_f = \frac{150 \cdot 112}{100} = 168\ €$$

ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

La escala es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida. Por ejemplo, si en un mapa aparece señalada la siguiente escala (1:20 000), se interpreta que 1 cm del mapa representa 20 000 cm en la realidad. A la hora de resolverlo se puede aplicar el concepto de regla de tres directa.

FIGURAS PLANAS PROPIEDADES MÉTRICAS

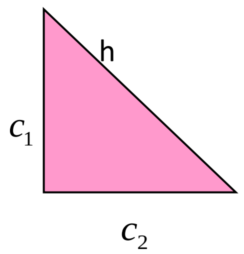
PROPIEDADES MÉTRICAS DE LAS FIGURAS PLANAS.

-SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO.

$$S = 180^{\circ} \cdot (n - 2)$$

-TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras nos indica una relación que existe entre los cuadrados de los lados de un triángulo y el cuadrado de la hipotenusa.

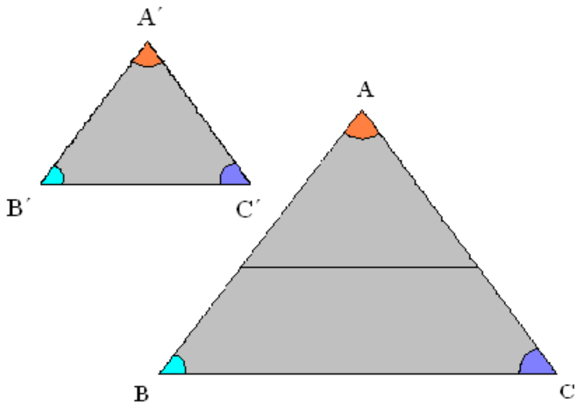


h→hipotenusa

c_1,c_2→catetos

La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa $\boxed{h^2 = c_1^2 + c_2^2}$

-TRIÁNGULOS SEMEJANTES



1. Tienen dos ángulos correspondientes iguales.

Ejemplo: $\boxed{\hat{A} = \hat{A}'}$ y $\boxed{\hat{B} = \hat{B}'}$

2. Tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman.

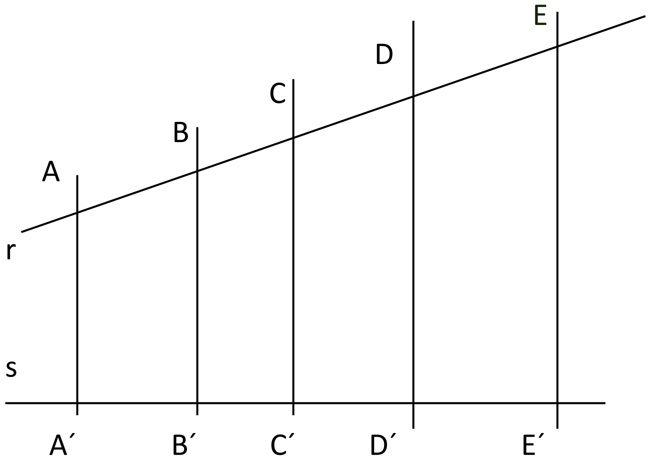
Ejemplo: $\boxed{\hat{B} = \hat{B}'}$ .Y $\boxed{\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}}$

3. Tienen sus lados homólogos y proporcionales .

Ejemplo: $\boxed{\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k}$

NOTA 1: k es la razón de semejanza, que es la constante de proporcionalidad entre sus lados.
NOTA2: Si k es la razón de semejanza, en áreas es k^2 y en volúmenes k^3

-TEOREMA DE TALES



$$\boxed{\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots}$$

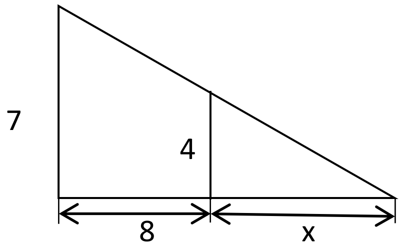
La constante de proporcionalidad se denomina razón de semejanza.

Ejemplo:

Supongamos que la distancia AB es de 3 cm y que la distancia A´B´ es de 1,5 cm, la razón sería $\frac{3}{1{,}5}$.

Ahora supongamos que la distancia entre BC es de 1 cm pues la distancia de B´C´ tiene que ser de 0,5. y la razón sería $\frac{1}{0{,}5}$. Podemos comprobar que $\frac{3}{1{,}5} = \frac{1}{0{,}5} = 2$.

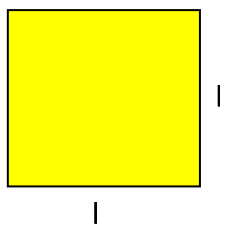
Otro caso de teorema de Tales muy típico son los triángulos en posición de Tales, lógicamente se mantiene el mismo principio. Pero se cambia un poco la forma de enunciarlo. Todos los lados de un triángulo son proporcionales en la misma razón a los lados de sus triángulos semejantes. Por lo tanto yo puedo formar una proporción entre dos lados. Para entenderlo mejor, se hallará el valor de x en el siguiente triángulo, basándonos en el concepto previamente explicado.



$$\frac{x}{x+8} = \frac{4}{7} \rightarrow 7x = 4x + 32 \rightarrow 3x = 32 \rightarrow x = \frac{32}{3} = 10{,}\widehat{6}$$

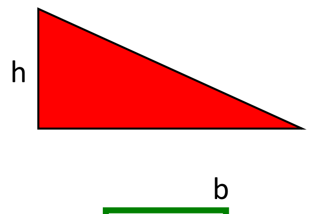
FIGURAS PLANAS

Cuadrado



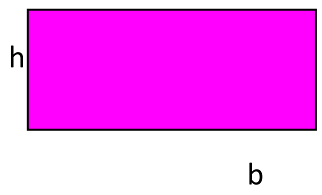
$S = lxl$

Triángulo



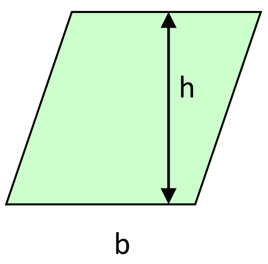
$S = \frac{bxh}{2}$

Rectángulo



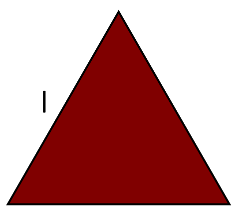
$S = bxh$

Paralelogramo



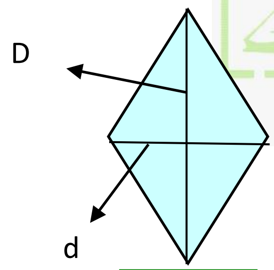
$S = bxh$

Triángulo equilátero



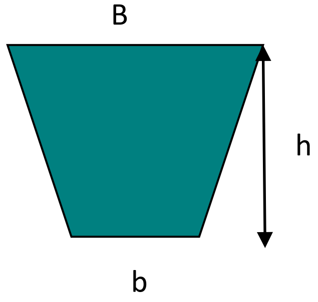
$S = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

Rombo



$S = \frac{Dxd}{2}$

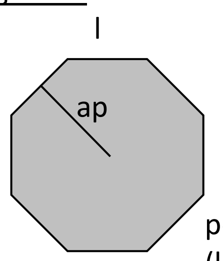
Trapecio



$S = \left(\frac{B+b}{2}\right)xh$

Polígonos Regulares

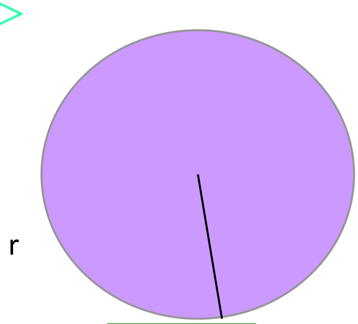
ap= apotema



pe= perímetro (lasuma de sus lados)

$S = \frac{\mathrm{pe} \cdot \mathrm{ap}}{2}$

Circunfere



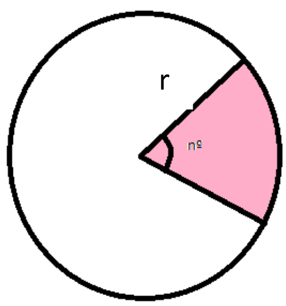
r= radio

L= longitud de la circunferencia

$L = 2\Pi r$

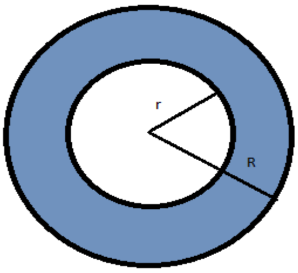
$S = \Pi r^2$

Sector Ci



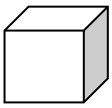
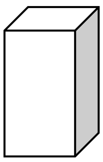
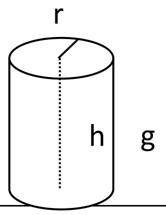
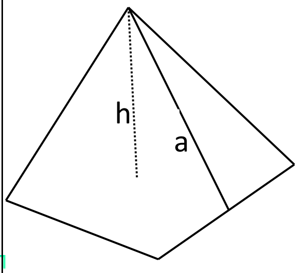
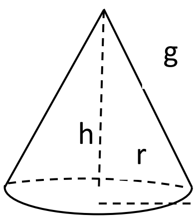
$S = \frac{\Pi \cdot r^2 \cdot n^o}{360^o}$

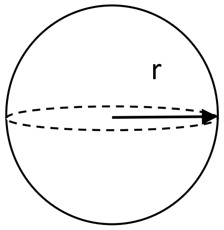
Corona Circular



$$\boxed{S = \Pi(R^2 - r^2)}$$

CUERPOS GEOMÉTRICOS

CUERPOS	AREAS		VOLÚMENES
	LATERAL	TOTAL	
 a	$A_L = 4a^2$	$A_T = 6a^2$	$V = a^3$
 h	$A_L = P(perimetro\ base) \cdot h$	$A_T = A_L + 2A_B$	$V = A_B \cdot h$
	$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot g$	$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
	$A_L = \frac{P \cdot a}{2}$	$A_T = A_L + A_B$	$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$
	$A_L = \pi \cdot r \cdot g$	$A_T = A_L + A_B$	$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$

	$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

EXPRESIÓN GRÁFICA

DEFINICIONES PREVIAS

CONCEPTO DE FUNCIÓN

Función es una aplicación en la que se relaciona un conjunto inicial A (un conjunto cualquiera de números) y un conjunto final B que es el conjunto $\Re$ de los números reales.

$$A \xrightarrow{f(x)} B$$

El conjunto A se le denomina **dominio** o campo de existencia.

CONSTANTES Y VARIABLES

Constante: Es un valor fijo y determinado

Variables: Se designan por letras que pueden tomar distintos valores. Se clasifican en: independientes y dependientes.

Variables independientes: Representa a cualquier elemento del campo de existencia. (se suele representar por la letra "x")

Variables dependientes: Representa la imagen de x en el conjunto final. (se suele representar por la letra "y" o $f(x)$)

Ejemplo:

Suponemos que el precio de las manzanas es de 2 Euros el kg. Y queremos hacer una función que nos de el coste en función del número de kilogramos que compró.

Kg. de frutas que compró $\longrightarrow$ es la variable independiente "x"

Costes $\longrightarrow$ es la variable dependiente "y" *("depende" del número de kg que compremos)*

La función sería $y = 2 \cdot x$

Elijo comprar 6 kg., al sustituir la x por 6 nos da el coste $y = 2 \cdot 6 = 12$ euros

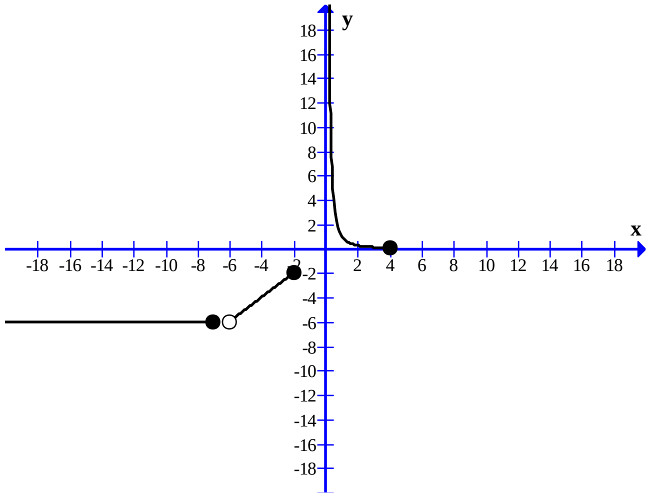
NOTA: Esta función es de proporcionalidad directa $y = m \cdot x$ (pasa por el origen)

DOMINIO Y RECORRIDO

El dominio de una función: está formado por aquellos valores de x (números reales) para los que se puede calcular la imagen f(x). Gráficamente lo determinamos en el eje OX mirando de izquierda a derecha.

Recorrido o rango de una función: es el conjunto formado por las imágenes. Son los valores que toma la función f(x). Su valor depende del valor dado a la variable independiente "x". Gráficamente se puede ver en el eje OY de ordenadas, leyendo de abajo a arriba.

Ejemplo de cálculo de dominio y recorrido gráficamente:



$$Dom[f(x)] = (-\infty, -7] \cup (-6, -2] \cup (0, +\infty)$$

$$R[f(x)] = [-6, -2] \cup [0, +\infty)$$

NOTA 1: *Si el punto extremo está dentro del intervalo definido en la función se representa por un circulo relleno (en los intervalos se representa mediante el corchete). Si el punto no lo contiene la función se representa por un circulo sin relleno (en los intervalos se representa mediante un paréntesis).*

NOTA 2: *Los infinitos en el intervalo siempre llevan paréntesis.*

SIMETRÍAS

- Una función $f(x)$ es simétrica respecto al eje OY (simetría par), cuando se verifica que $f(-x) = f(x)$.

  Ejemplo: $f(x) = x^2 - 4$;
  para hallar $f(-x)$ se sustituye en la función la variable x por $-x$
  $f(-x) = (-x)^2 - 4;$ $(todo\ número\ elevado\ a\ exponente\ par\ queda\ positivo\ )$
  $f(-x) = x^2 - 4$

  Como se puede ver $f(x) = f(-x)$, por lo tanto se puede concluir que es una función par.

- Una función $f(x)$ es simétrica respecto al origen de coordenadas (simetría impar), cuando se verifica que $f(-x) = -f(x)$.

  Ejemplo: $f(x) = 3x^3 - x$
  $f(-x) = 3(-x)^3 - x = 3x^3 + x$
  $-f(x) = -3x^3 + x;$

  Como $f(-x) = -f(x)$ $Podemos\ afirmar\ que\ es\ una\ función\ impar.$

PERIODICIDAD

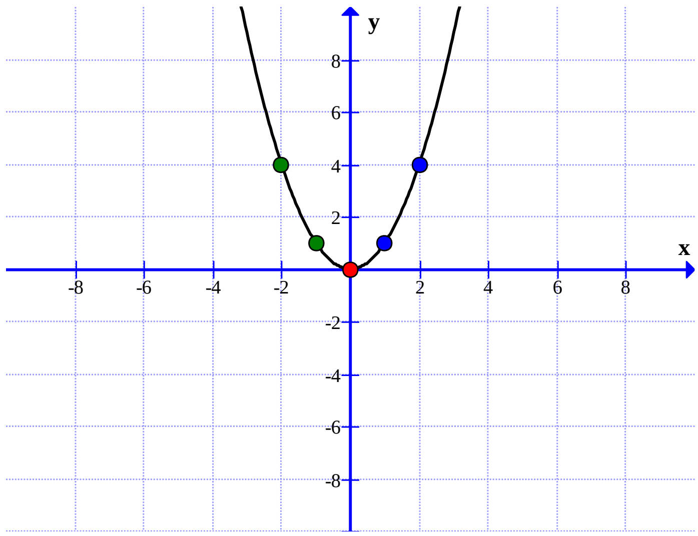
Una función es periódica cuando los valores que toman se repiten cada cierto intervalo de tiempo llamado periodo y comúnmente representado por T.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Función creciente: una función es creciente cuando al aumentar los valores de la variable independiente “x” aumentan los valores de la variable dependiente “y”, o inversamente si al disminuir los valores de la variable independiente “x”, también disminuyen los valores de la variable dependiente “y”. La diferencia entre los valores de x se llama tasa de variación, y en este caso es positiva.

Función decreciente: una función es decreciente cuando su tasa de variación es negativa. Al aumentar los valores de la variable independiente “x”, disminuyen los valores de la variable dependiente “y”, o viceversa. En este caso la tasa de variación es negativa.

Función constante: una función es constante cuando su tasa de variación es nula.



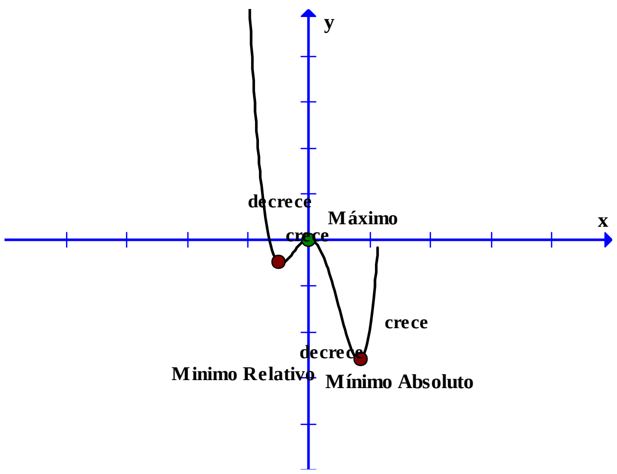
Ejemplo:

Decreciente: $(-\infty,0)$

Creciente: $(0,+\infty)$

Se puede observar como en los puntos (-2,4) y (-1,1) a medida que aumenta el valor de la “x”, disminuye el valor de la “y”, por lo que es decreciente. Mientras que en los puntos (1,1) y (2,4) a medida que crece el valor de “x”, también crece el valor de “y”, por lo tanto es creciente.

MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN



Una función f tiene en x=a un:

Máximo relativo: f(a) es el mayor valor de f en un entorno de a.

Mínimo relativo: f(a) es el menor valor de f en un entorno de a.

Máximo absoluto: f(a) es el mayor valor de f en todo el dominio.

Mínimo absoluto: f(a) es el menor valor de f en todo el dominio.

FUNCIÓN CONSTANTE $\boxed{y=k}$

a) Dom f = $\mathbb{R}$

b) Imagen = k

c) Simetrías f(x) = f(-x) $\Rightarrow$ par

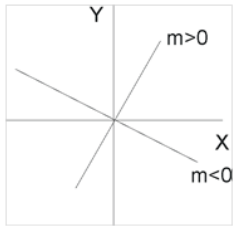
FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA (F. LINEAL) $\boxed{y=mx}$

a) Dom f = R

b) Imagen = $\mathbb{R}$

c) Simetrías: f(x) = -f(-x) $\Rightarrow$ impar

d) Monotonía $\begin{cases} m>0 \Rightarrow creciente\ \ \Re \\ m<0 \Rightarrow decreciente\ \Re \end{cases}$



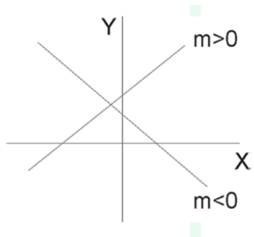
FUNCIÓN AFIN $\boxed{y=mx+n}$

a) Dom f = $\mathbb{R}$

b) f(D) = $\mathbb{R}$

c) Simetrías: no tiene

d) Crecimiento $\begin{cases} m>0 \Rightarrow creciente\ \Re \\ m<0 \Rightarrow decreciente\ \ \Re \end{cases}$



m$\Rightarrow$ pendiente
n$\Rightarrow$ ordenada en el origen

NOTA: Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales, en caso contrario son secantes.

EJEMPLO DE REPRESENTACIÓN DE FUNCIÓN AFÍN

Se llama función lineal o función de primer grado, a toda expresión de la forma:

$$\boxed{f(x)=mx+n}$$

1) El valor de "m" se llama **pendiente de la recta** y depende del ángulo que forme con el eje x.

2) El valor de "n" se llama **ordenada en el origen** y define el punto en el que la recta corta al eje y.

(Su representación gráfica es siempre en una línea recta)

Ejemplo: $f(x)=2x-3$

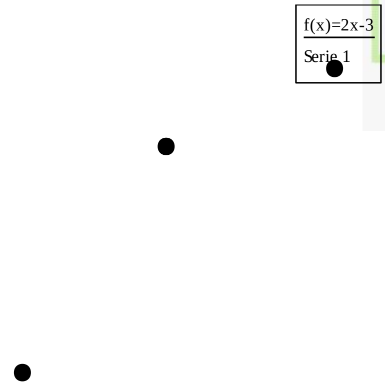
Se forma una tabla de valores sustituyendo los valores que nosotros asignemos a la variable "x" en la función. En este caso $y=2x-3$.

x	y
1	5
0	3
1	1
2	1
4	5

Quedándonos los puntos (-1,-5), (0,-3), (1,-1), (2,1), (4,5). Que a continuación los representamos:

NOTA: *Recordemos que en las coordenadas de un punto siempre se pone primero el valor de la "x" que se representa en el eje de abscisas y después el de la "y" que se representa en el eje de ordenadas.*

Figura 1 Representación de la función lineal $f(x) = 2x - 3$



ESTADÍSTICA

POBLACIÓN O MUESTRA

Población conjunto de individuos, con alguna característica común, sobre el que se hace el estudio. Por ejemplo: La población puede ser un determinado equipo de baloncesto, la característica común es que tienen que pertenecer a ese equipo de baloncesto, y lo que queremos estudiar es la estatura media. Otra población podría ser los habitantes de Gijón (la característica común es que tienen que ser habitantes de Gijón), y lo que queremos estudiar también puede ser la estatura media. La diferencia entre el equipo de baloncesto y la población de Gijón es que en el equipo de baloncesto le puedo preguntar a cada jugador cuanto mide y hacer la media. En cambio con la población de Gijón sería inviable. Aquí es donde entra en juego**, la muestra.**

Muestra es un subconjunto de la población. Debe elegirse de forma que sea **representativa** de toda la población. Es decir si tenemos una población envejecida en un 60% no voy a coger a todos los individuos jóvenes, tendré que coger porcentajes similares a la población. Otro ejemplo sería si hay un 2 % de inmigrantes de Italia yo intentaré contemplar ese tanto por ciento en mi muestra. O al revés, si solo hay tres inmigrantes de kazajistan en todo Gijón no cogeré a los 3 para mi muestra de 100 personas. Ya que no son representativos, su peso respecto al total de la población no es relevante.

TIPOS DE VARIABLES

Las **variables cualitativas** expresan características o cualidades, ejemplo: color de ojos, Marcas de coches. Por otro lado, las **variables cuantitativas**, son aquellas que se expresan mediante un número, por tanto, se puede realizar operaciones aritméticas con ellas. Ejemplo: Estatura, peso, número de personas que les gusta el futbol…

Dentro de las variables cuantitativas se pueden distinguir entre **cuantitativa discreta**, aquella que entre dos valores consecutivos no existen valores intermedios. Por ejemplo número de amigos pueden ser 3, 4, 5… pero no puedes tener 3,2 o 3,7 amigos, otros ejemplos serían bolsas de palomitas que compraste, número de hermanos… Por otro lado una **variable continua** es aquella que entre dos valores cualesquiera se pueden coger infinitos valores intermedios. Por ejemplo: la estatura entre 1,80 y 1,81 metros existen infinitos valores 1,80756 , 1,80058794…

MEDIDAS DE DISTRIBUCIÓN CENTRAL (MEDIA, MEDIANA Y MODA)

Este tipo de medidas nos permiten identificar y ubicar el punto (valor) alrededor del cual se tienden a reunir los datos (“Punto central”). Estas medidas aplicadas a las características de las unidades de una muestra se les denomina estimadores o estadígrafos; mientras que aplicadas a poblaciones se les denomina parámetros o valores estadísticos de la población. Los principales métodos utilizados para ubicar el punto central son la media, la mediana y la moda.

Ejemplo: Vamos a suponer, que he estado observando en un parque la gente que va a correr y he anotado las edades. En la siguiente tabla, los datos que observe los he resaltado en negrita y los otros son los que necesitamos hallar para las medidas de distribución central.

X_i = valor medio de cada intervalo que he cogido para el estudio.
L_0 - L_1 = valores extremos de los intervalos escogidos
fi= número de observaciones que se encuentran dentro de cada intervalo. En nuestro caso personas que se encuentran dentro de cada intervalo de edad.
Fi= número de observaciones que se encuentran hasta ese intervalo, se incluyen las observaciones de los anteriores intervalos.
Por ejemplo el primer intervalo nos dice que entre 0 y 20 años había 10 personas corriendo en el parque, el segundo intervalo que entre 20 y 40 había 32 personas corriendo en el parque…

X_i	$L_0 – L_1$	f_i	F_i	$X_i \cdot f_i$
10	**0-20**	**10**	10	100
30	**20-40**	**32**	42	960
50	**40-60**	**18**	60	900
70	**60-80**	**20**	80	1400
		N=80		3360

MEDIA:

Es la medida de posición central más utilizada, la más conocida y la más sencilla de calcular, debido principalmente a que sus ecuaciones se prestan para el manejo algebraico, lo cual la hace de gran utilidad. Su principal desventaja radica en su sensibilidad al cambio de uno de sus valores o a los valores extremos demasiado grandes o pequeños. La media se define como la suma de todos los valores observados, dividido por el número total de observaciones.

$$\boxed{\text{Media aritmética} = \frac{\textit{Suma} \text{ de todos los valores observados}}{\text{Número total de observaciones}}}$$

1) Lo primero sumando los puntos extremos del intervalo y dividiendo entre 2 hallo el Xi. Para que podamos operar mejor con los datos que nos dan. Este paso sólo es necesario si nos dan los datos en forma de intervalos. Sino operaríamos directamente con el dato dado.

2) Hallamos la columna de "Xi$\times$ fi ". A continuación hacemos la suma de los valores obtenidos, que llamaremos Σ Xi$\times$ fi

3) Sumamos la columna de la fi, obteniendo un valor al que llamaremos N

4) Aplicamos la siguiente fórmula. En la cual, designamos la media con la siguiente carácter. $\overline{X}$

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum X_i \times f_i}{N}} \quad \overline{X} = \frac{\sum X_i \times f_i}{N} = \frac{3360}{80} = 42$$

MEDIANA:

Con esta medida podemos identificar el valor que se encuentra en el centro de los datos, es decir, nos permite conocer el valor que se encuentra exactamente en la mitad del conjunto de datos, después que las observaciones estén ubicadas en una serie ordenada. Esta medida nos indica, que la mitad de los datos se encuentran por debajo de este valor y la otra mitad por encima del mismo. Para determinar la posición de la mediana se utiliza la fórmula.

$$\boxed{\text{Posición de la mediana} = \frac{N+1}{2}}$$

*Seguimos con el mismo ejemplo que el de la media.

Aplicamos la fórmula $\frac{80+1}{2} = 40{,}5$,

Fijándonos en la tabla la columna de Fi vemos que el primer valor que engloba al 40,5 es el 42. Ahora miramos que Xi corresponde al 42, viendo que es 30. Lo cual será nuestra mediana.

Mediana = 30

MODA:

La medida modal nos indica el valor que más veces se repite dentro de los datos.

Es posible que en algunas ocasiones se presente dos valores con la mayor frecuencia, lo cual se denomina b*imodal. Para más de dos valores se conoce como multimodal.*

En el ejemplo anterior vemos que la moda es: Xi=30. Es el valor que más se repite, en este caso concreto 32 veces.

MEDIDAS DE POSICIÓN: CUANTILES

Los cuantiles son valores de la distribución que la dividen en partes iguales, es decir, en intervalos, que comprenden el mismo número de valores. Los más usados son los cuartiles, los deciles y los percentiles.

- **PERCENTILES**: son 99 valores que dividen en cien partes iguales el conjunto de datos ordenados. Ejemplo, el percentil de orden 15 deja por debajo al 15% de las observaciones, y por encima queda el 85% de ellas.
- **CUARTILES**: son los tres valores que dividen al conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales, son un caso particular de los percentiles:
  - El primer cuartil Q 1 es el menor valor que es mayor que una cuarta parte de los datos (N/4)
  - El segundo cuartil Q 2 (la mediana), es el menor valor que es mayor que la mitad de los datos (2N/4).
  - El tercer cuartil Q 3 es el menor valor que es mayor que tres cuartas partes de los datos (3N/4).
- **DECILES:** son los nueve valores que dividen al conjunto de datos ordenados en diez partes iguales, son también un caso particular de los percentiles.

Ejemplo: En una localidad se realiza un estudio de 40 familias sobre el número de hijos (xi) que tienen.

Calcula:
a) Percentil 10 y 25
b) Primer, segundo y tercer cuartil
c) Segundo decil

x_i	f_i	F_i
0	4	4
1	8	12
2	5	17
3	8	25
4	8	33
5	7	40
	n=40	

Recordemos que el xi se identifica con el número de hijos que tiene cada familia, y el fi se identifica con el número de familias que tienen cero hijos, un hijo…

Ejemplos de percentiles, cuartiles y deciles:

- Percentil 25 $= \frac{25 \times 40}{100} = 10$ Mirando en la Fi observamos que el primer valor que nos engloba al 10 es el 12, por lo tanto el valor correspondiente a 12 es xi=1. Recordemos que hay que dar el valor que nos da xi
- Percentil 10 $= \frac{10 \times 40}{100} = 4$ Mirando en la Fi observamos que el valor 4 está justo en el límite entre la xi=0 y la xi=1 sumando los valores y dividiendo entre 2 nos da 0,5.
- Primer Cuartil (Q1) $= \frac{40}{4} = 10$ podemos ver que corresponde con el percentil 25, por lo tanto xi=1.
- Segundo Cuartil (Q2) $= \frac{2 \times 40}{4} = 20$ podemos ver que coincide con la mediana, y fijándonos en Fi vemos que el primer valor que lo engloba es 25 por lo tanto la xi=3.

- Tercer Cuartil (Q3) $= \frac{3 \times 40}{4} = 30$, este cuartil coincide con el percentil 75, fijándonos en Fi vemos que el primer valor que lo engloba es 33 por o tanto la xi=4.
- Segundo Decil (D2) $= \frac{2 \times 40}{10} = 8$ fijándonos en Fi vemos que el primer valor que lo engloba es 12 por o tanto la xi=1.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de tendencia central tienen de objetivo sintetizar los datos en un valor representativo, las medidas de dispersión nos tratan de delimitar hasta que punto estas medidas de tendencia central son representativas como síntesis de la información. Las medidas de dispersión cuantifican la separación, la dispersión, la variabilidad de los valores de la distribución respecto al valor central. Distinguimos entre medidas de dispersión absolutas, que no son comparables entre diferentes muestras y las relativas que nos permitirán comparar varias muestras.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN ABSOLUTAS

VARIANZA:

(s^2): Es el promedio del cuadrado de las distancias entre cada observación y la media aritmética del conjunto de observaciones.

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum x_i^2 \times f_i}{N} - \bar{x}^2}$$

DESVIACIÓN TÍPICA:

(s): La varianza viene dada por las mismas unidades que la variable pero al cuadrado, para evitar este problema podemos usar como medida de dispersión la desviación típica que se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$\boxed{s = \sqrt{s^2}}$$

RECORRIDO O RANGO DE UNA MUESTRA:

(R_e). Es la diferencia entre el valor de las observaciones mayor y el menor. $R_e = x_{max} - x_{min}$

MEDIDAS DE DISPERSIÓN RELATIVAS

COEFICIENTE DE VARIACIÓN DE PEARSON:

Cuando se quiere comparar el grado de dispersión de dos distribuciones que no vienen dadas en las mismas unidades o que las medias no son iguales se utiliza el coeficiente de variación de Pearson que se define como el cociente entre la desviación típica y el valor absoluto de la media aritmética.

$$\boxed{\mathrm{CV} = \frac{s}{\bar{x}}}$$

CV representa el número de veces que la desviación típica contiene a la media aritmética y por lo tanto cuanto mayor es CV mayor es la dispersión y menor la representatividad de la media.

Ejemplo: Hallar todas las medidas de dispersión que conocemos a partir de la siguiente tabla. En la que se estudió en una población la cantidad de personas que juegan a los bolos en función de la edad de los mismos.

x_i	**$L_0 - L_1$**	**f_i**	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
10	**0-20**	**10**	10	100	$10^2 \cdot 10=1000$
30	**20-40**	**32**	42	960	28800
50	**40-60**	**18**	60	900	45000
70	**60-80**	**20**	80	1400	98000
		N=80		$\sum 3360$	$\sum 172800$

1) Lo primero tendremos que hallar la media ya que es necesaria para los cálculos.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \times f_i}{N} = \frac{3360}{80} = 42$$

2) Calculamos la varianza

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 \times f_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{172800}{80} - 42^2 = 396$$

3) Calculamos la desviación típica:

$s = \sqrt{396} = 19{,}90$ Esto nos indica la dispersión de los datos. Es decir lo que se distancian de la media. Es decir, que la mayoría de los datos están 19,90 por encima de la media y 19,90 por debajo de la media.

4) Calculamos el CV

$CV = \dfrac{19{,}90}{42} = 0{,}47 = 47\%$ Esto nos índica la dispersión. Al ser un % nos permite comparar la dispersión de diferentes distribuciones estadísticas entre sí.

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS.

Entre los diferentes tipos podemos resaltar los siguientes:
1) Histograma
2) Diagrama de Barras
3) Diagrama de sectores

HISTOGRAMA

Se utiliza para variables cuantitativas continuas. Es decir entre dos puntos cualquiera existen infinitos puntos. Ej. Estatura, edad, monedas….

La siguiente tabla nos muestra en una población la cantidad de personas que juegan a los bolos en función de la edad de los mismos.

$L_0 - L_1$	F_I
0-20	10
20-40	32
40-60	18
60-80	20
	N=80

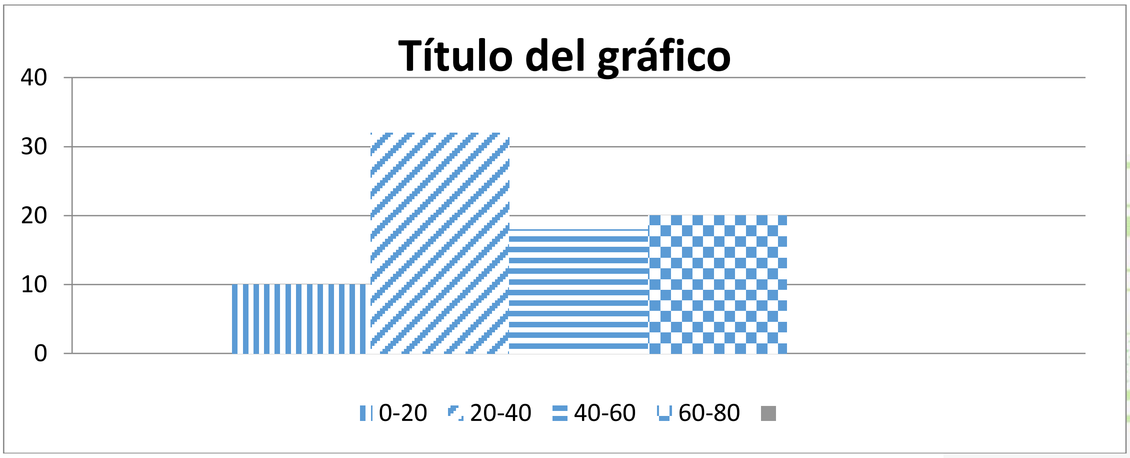


DIAGRAMA DE BARRAS

Se utiliza para variables cuantitativas discretas. Es decir entre dos puntos cualquiera hay puntos finitos. Ej. Número de amigos, bolsas de patatas compradas….

El siguiente gráfico nos muestra el número de botellas de agua compradas en una semana en la máquina del centro por los alumnos de un aula.

X_I	F_I
0	4
1	8
2	5
3	8
4	8
5	7

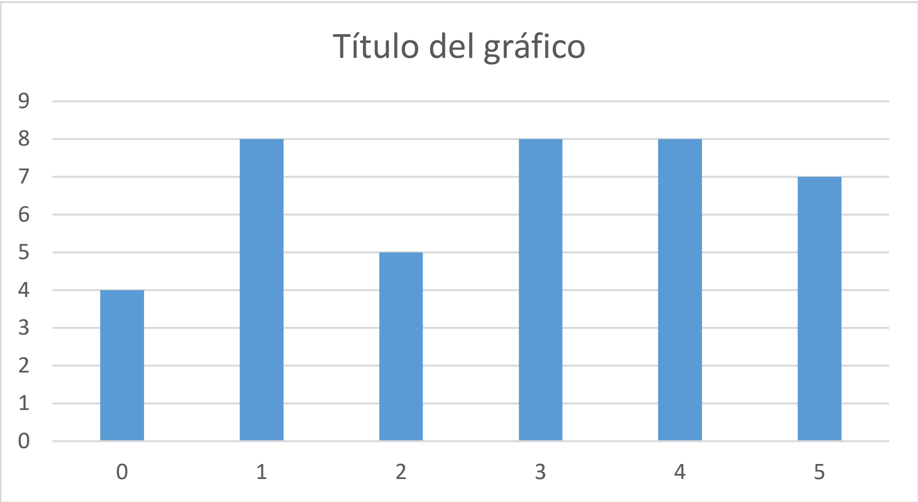


DIAGRAMA DE SECTORES

Se utiliza para variables cuantitativas discretas y continuas.

Usando el mismo ejemplo que en el apartado anterior. No obstante hay que calcular previamente los diferentes ángulos para cada sectores circular que representaremos. Para ellos vamos a aplicar la siguiente fórmula.

$$grados\ de\ cada\ sector = \frac{fi}{N} \cdot 360°$$

X_I	F_I	°
0	4	36°
1	8	72°
2	5	45°
3	8	72°
4	8	72°
5	7	63°
	N=40