

POTENCIAS / RAÍCES

Potencias de exponente natural: $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$
 entero: $a^{-n} = 1/a^n$
 fraccionario: $a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p}$

Propiedades:	1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	5) $(a/b)^n = a^n / b^n$
	2) $a^n / a^m = a^{n-m}$	4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	6) $a^0 = 1$

Raíz enésima: $\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow r^n = a$; n índice; a radicando
 si n impar $\Rightarrow$ r es única
 si n par $\Rightarrow$ para $a > 0$, existen dos raíces ($\pm r$)
 para $a < 0$, no tiene

Propiedades:	1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	3) $(\sqrt[n]{a})^r = \sqrt[n]{a^r}$	5) $\sqrt[n^p]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
	2) $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$	4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	6) $a^p = \sqrt[n]{a^{n \cdot p}}$

Racionalización: 1) $\frac{a}{\sqrt[n]{b^p}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-p}}}{b}$ 2) $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$

ECUACIÓN DE 2º GRADO

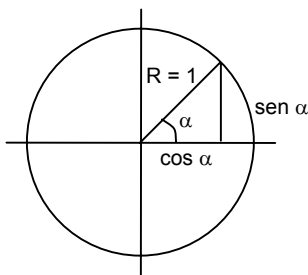
Definición: $ax^2 + bx + c = 0$ Soluciones: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$ si $\Delta > 0$ 2 soluciones reales distintas
 $\Delta = 0$ 1 solución real (doble)
 $\Delta < 0$ 2 soluciones complejas (conjugadas)

Fórmula simplificada si b es par: $x = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$

Suma y producto de soluciones: $\left. \begin{array}{l} S = x_1 + x_2 = -b/a \\ P = x_1 \cdot x_2 = c/a \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$

TRIGONOMETRÍA



$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} \alpha / \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = 1 / \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{sec} \alpha = 1 / \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1 / \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cos} \alpha / \operatorname{sen} \alpha$$

SIGNOS EN LOS CUADRANTES

1 ^{er} CUADRANTE	2º CUADRANTE	3 ^{er} CUADRANTE	4º CUADRANTE
sen α = +	sen α = +	sen α = -	sen α = -
cos α = +	cos α = -	cos α = -	cos α = +
tg α = +	tg α = -	tg α = +	tg α = -
cosec α = +	cosec α = +	cosec α = -	cosec α = -
sec α = +	sec α = -	sec α = -	sec α = +
ctg α = +	ctg α = -	ctg α = +	ctg α = -

ECUACION FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRIA

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1} \\ \begin{array}{cc} \boxed{: \text{cos}^2 \alpha} & \boxed{: \text{sen}^2 \alpha} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} + \frac{\text{cos}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} & \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} + \frac{\text{cos}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} \\ \boxed{\text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} = \text{sec}^2 \alpha} & \boxed{1 + \text{c} \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} = \text{cosec}^2 \alpha} \end{array}$$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS MAS COMUNES

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\infty}{\cancel{\neq}}$	0	$\frac{-\infty}{\cancel{\neq}}$	0

FORMULAS TRIGONOMETRICAS

Adición: $\begin{array}{l} \text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \beta \pm \text{cos} \alpha \cdot \text{sen} \beta \\ \text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos} \alpha \cdot \text{sen} \beta \pm \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \beta \end{array}$ $\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg} \alpha \pm \text{tg} \beta}{1 \mp \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta}$

Angulo doble: $\begin{array}{l} \text{sen} 2\alpha = 2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha \\ \text{cos} 2\alpha = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \end{array}$ $\text{tg} 2\alpha = \frac{2 \text{tg} \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$

Angulo mitad: $\begin{array}{l} \text{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos} \alpha}{2}} \\ \text{cos} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{cos} \alpha}{2}} \end{array}$

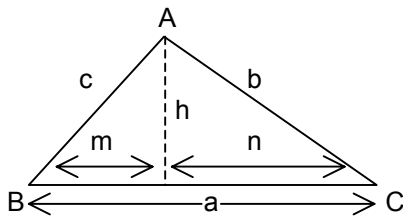
Transformaciones: $\begin{array}{l} \text{sen} \alpha \pm \text{sen} \beta = 2 \cdot \text{sen} \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \text{cos} \frac{\alpha \mp \beta}{2} \\ \text{cos} \alpha + \text{cos} \beta = 2 \cdot \text{cos} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{cos} \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \text{cos} \alpha - \text{cos} \beta = -2 \cdot \text{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array}$

RESOLUCION DE TRIANGULOS

TRIANGULOS RECTANGULOS:

$$\hat{A} = 90^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$



Razones trigonométricas	$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a}$	$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a}$
	$\text{cos } \hat{B} = \frac{c}{a}$	$\text{cos } \hat{C} = \frac{b}{a}$
	$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c}$	$\text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b}$

Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Teorema de la altura

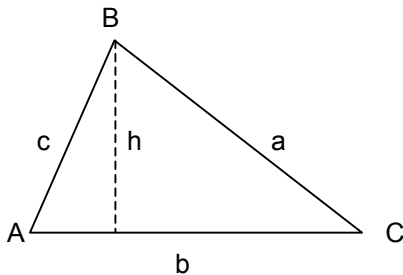
$$h^2 = m \cdot n$$

Teorema del cateto

$$c^2 = a \cdot m \quad b^2 = a \cdot n$$

TRIANGULOS CUALESQUIERA:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$



Teorema de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Teorema del coseno:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{cases}$$

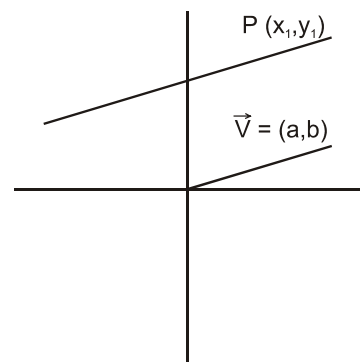
Fórmulas del área:

$$S = \frac{1}{2}bh \quad S = \frac{1}{2}ba \cdot \text{sen } C$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \quad \text{siendo } p = \frac{a+b+c}{2}$$

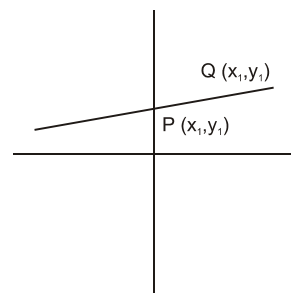
ANALITICA

PUNTO	$P(X_1, Y_1)$
VECTOR DIRECTOR	$\vec{V}(a,b)$
EC. VECTORIAL	$(x,y) = (x_1,y_1) + t(a,b)$
EC. PARAMETRICAS	$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}$
EC. CONTINUA	$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b}$

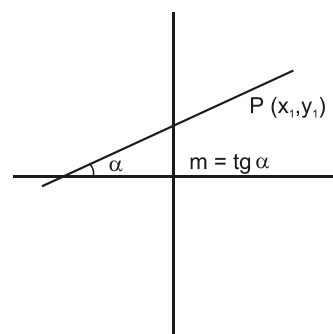


EC. GENERAL $Ax + By + C = 0$

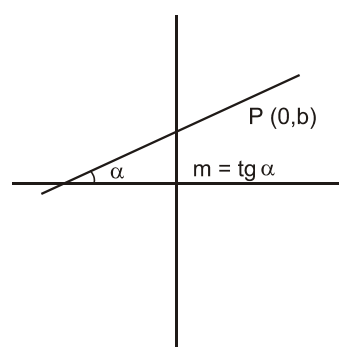
EC. DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$



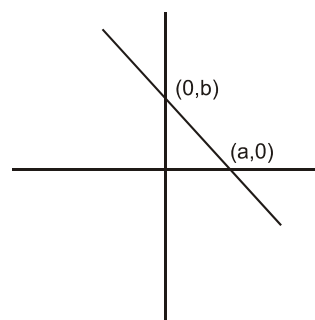
EC. PUNTO-PENDIENTE
 punto $y - y_1 = m(x - x_1)$
 pendiente $P(x_1, y_1)$
 m



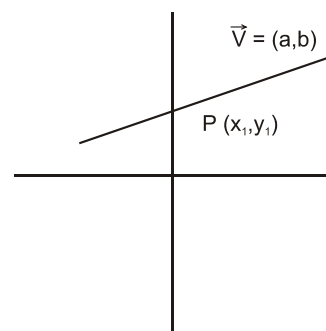
EC. EXPLICITA
 ordenada en el origen $y = mx + b$
 pendiente $P(0, b)$
 m



EC. SEGMENTARIA O CANONICA
 abscisa en el origen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
 ordenada en el origen $(a, 0)$
 $(0, b)$



EC. DADO EL VECTOR Y UN PUNTO
 vector asociado $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$
 punto $\vec{V} = (A, B)$
 $P(x_1, y_1)$



EC. NORMAL $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$

CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

$$\left. \begin{array}{l} r = Ax + By + C = 0 \\ r' = A'x + B'y + C' = 0 \end{array} \right\} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \quad \text{COINCIDENTES}$$

$$m = m' \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \quad \text{PARALELAS}$$

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \quad \text{SECANTES}$$

$$(A, B) (A', B') = 0 \quad AA' + BB' = 0 \quad \text{PERPENDICULARES}$$

$$m \text{ y } m' \text{ pendientes} \quad m \cdot m' = -1 \quad \text{PERPENDICULARES}$$

DISTANCIAS, ANGULOS

Distancia: a) entre dos puntos $d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

b) entre punto y recta $d(P, r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

c) entre dos rectas $\left| \begin{array}{ll} \text{no paralelas} & d(r, r') = 0 \\ \text{paralelas} & d(r, r') = d(P, r') \quad P \in r \end{array} \right.$

Angulo de dos rectas: $r) Ax + By + C = 0$ y $s) A'x + B'y + C' = 0$

$$\cos \alpha = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2}} \quad \text{tg } \alpha = \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'} \quad m, m' \text{ pendientes}$$

Mediana:	recta que une un vértice con el punto medio de un lado opuesto
Baricentro:	punto de intersección de las tres medianas de un triángulo
Altura:	recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto
Ortocentro:	punto de intersección de las tres alturas de un triángulo
Mediatriz:	recta perpendicular a un lado y que pasa por su punto medio
Circuncentro:	punto de intersección de las tres mediatrices de un triángulo, es el centro de la circunferencia circunscrita
Bisectriz:	recta que pasa por un vértice y divide el ángulo en dos partes iguales, sus puntos equidistan de los dos lados
Incentro:	punto de intersección de las tres bisectrices interiores de un triángulo, es el centro de la circunferencia inscrita

VECTORES

Producto escalar de $\vec{v}$ y $\vec{t}$ es el número: $\vec{v} \cdot \vec{t} = v_1 t_1 + v_2 t_2$

Norma o módulo de $\vec{v}$ es el número: $\|\vec{v}\| = +\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Vectores ortogonales: si su producto escalar es cero

Vector unitario:	si su norma es 1 $\left(\frac{\vec{v}}{\ \vec{v}\ } \right)$ es unitario
Base ortogonal:	si los vectores de la base son ortogonales
Base ortonormal:	si los vectores de la base son ortogonales y unitarios
Angulo de 2 vectores:	$\cos(\vec{v}, \vec{t}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{t}}{\ \vec{v}\ \ \vec{t}\ } \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{t} = \ \vec{v}\ \ \vec{t}\ \cos(\vec{v}, \vec{t})$
Argumento de un vector:	es el ángulo α tal que $\tan \alpha = v_2/v_1$
Proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{t}$:	$p = \ \vec{v}\ \cdot \cos(\vec{v}, \vec{t})$

NUMEROS COMPLEJOS

Forma binómica: $Z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ $i = \sqrt{-1}$

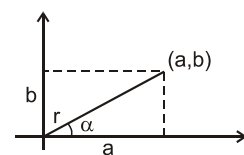
$$\begin{aligned} \text{operaciones:} \quad & (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\ & (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \\ & \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned}$$

conjugado: $\bar{Z} = a - bi$

Potencias: $i^{0+4n} = 1$ $i^{1+4n} = i$ $i^{2+4n} = -1$ $i^{3+4n} = -i$

Forma polar: $Z = r_\alpha$ con módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

argumento: $\alpha + 2k\pi$ tal que $\begin{cases} \cos \alpha = a/r \\ \sin \alpha = b/r \end{cases}$



$$\begin{aligned} \text{operaciones:} \quad & Z \cdot Z' = (r \cdot r')_{\alpha + \alpha'} \quad \frac{Z}{Z'} = \left(\frac{r}{r'} \right)_{\alpha - \alpha'} \\ & Z^n = (r^n)_{n\alpha} \quad \sqrt[n]{Z} = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\alpha + 2k\pi}{n}} \text{ con } k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

CONICAS

CIRCUNFERENCIA

Lugar geométrico del plano de los puntos del plano P (x, y) que equidistan de un punto fijo (CENTRO), una distancia constante (RADIO)

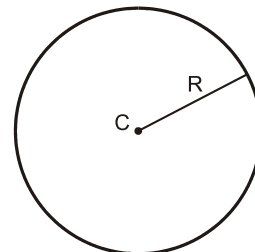
$$d(P, C) = R$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$C = (a, b) = \left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2} \right)$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$R = +\sqrt{a^2 + b^2 - F} = +\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$



ELIPSE

Lugar geométrico del plano de los puntos del plano P (x, y) cuya suma de distancias a dos puntos fijos (FOCOS), es constante

$$d(P, F) + d(P, F') = \text{cte.} = 2a$$

$$AA' = 2a \Rightarrow \text{eje mayor}$$

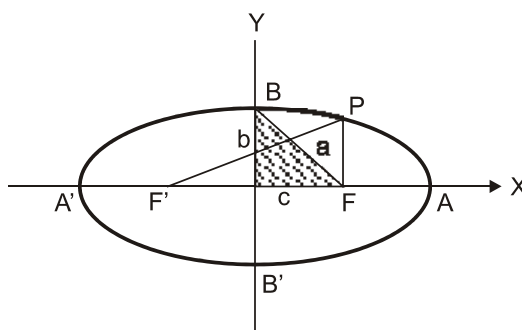
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$BB' = 2b \Rightarrow \text{eje menor}$$

$$\text{Excentricidad } e = \frac{c}{a}$$

$$FF' = 2c \Rightarrow \text{distancia focal}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



HIPERBOLA

Lugar geométrico del plano de los puntos del plano P (x, y) cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (FOCOS), es constante

$$d(P, F) - d(P, F') = \text{cte.} = 2a$$

$$AA' = 2a \Rightarrow \text{eje real o transverso}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

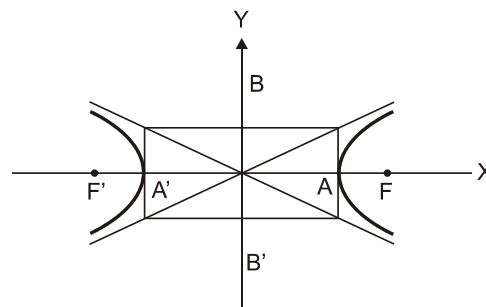
$$BB' = 2b \Rightarrow \text{eje imaginario o no transverso}$$

$$\text{Excentricidad } e = \frac{c}{a}$$

$$FF' = 2c \Rightarrow \text{distancia focal}$$

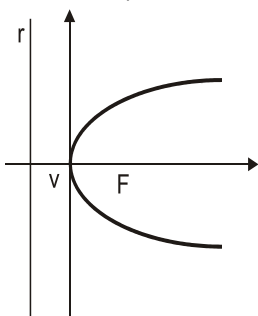
$$\text{Asíntotas } y = \pm \frac{b}{a}x$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



PARABOLA

Lugar geométrico del plano de los puntos del plano P (x, y) que equidistan de un punto fijo (FOCO) y una recta dada (DIRECTRIZ)



$$d(P, F) = d(P, r)$$

$$y^2 = 2px$$

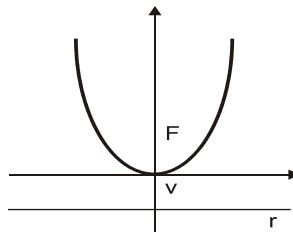
$$V(0, 0)$$

$$F(p/2, 0)$$

$$r: x = -p/2$$

p: parámetro de la parábola

$$P/2 = d(F, r) = d(V, F) = d(V, r)$$



$$x^2 = 2py$$

$$V(0, 0)$$

$$F(0, p/2)$$

$$r: x = -p/2$$

ANALISIS FUNCIONAL**LIMITES Y CONTINUIDAD****INDETERMINACIONES. RESOLUCION**

$$\left(\frac{k}{0}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad (0 \cdot \infty) \quad (\infty - \infty) \quad (1^\infty) \quad (\infty^0) \quad (0^0)$$

$$\left(\frac{k}{0}\right) \quad \text{Cálculo de límites laterales}$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{En funciones racionales, descomponer en producto de factores el numerador y el denominador y simplificar}$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) \quad (\infty - \infty) \quad \text{En funciones irracionales, multiplicar y dividir la función por la expresión radical conjugada}$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad \text{Dividir numerador y denominador por la potencia máxima del denominador}$$

CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

$f(x)$ es continua en $x=x_0$ si:

1. $\exists f(x_0)$
2. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
3. $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

DERIVACION. PROPIEDADES LOCALES DE FUNCIONES Y OPTIMIZACIÓN**DEFINICION DE LA FUNCION DERIVADA**

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

El valor de la función derivada en un punto de la función $f(x)$ es la pendiente de la recta tangente a esa función en dicho punto

$$m = f'(x_0)$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

DERIVABILIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

$f(x)$ es derivable en $x = x_0$ si:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$$

Toda función derivable en un punto es continua en ese punto

Toda función no continua en un punto es no derivable en ese punto

TABLA DE DERIVADAS

$u = f(x)$		$v = g(x)$	
$y = k$	$y' = 0$	$y = \sqrt[n]{u^n}$	$y' = \frac{n u'}{m \sqrt[n]{u^{m-n}}}$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \operatorname{sen} u$	$y' = \cos u \cdot u'$
$y = kx$	$y' = k$	$y = \cos u$	$y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$y = kx^m$	$y' = mkx^{m-1}$	$y = c \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u'$
$y = u + v$	$y' = mu^{m-1} \cdot u'$	$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$y = u^m$	$y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$	$y = \operatorname{arc} \cos u$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$y = ku^m$	$y' = mku^{m-1} \cdot u'$	$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u$	$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + v'u$	$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} u$	$y' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$y = \sec u$	$y' = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u} \cdot u'$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$	$y = \operatorname{cosec} u$	$y' = \frac{-\cos u}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u'$
$y = L u$	$y' = \frac{u'}{u}$	$y = \operatorname{arc} \sec u$	$y' = \frac{u'}{u \sqrt{u^2 - 1}}$
$y = a^u$	$y' = a^u \cdot L a \cdot u'$	$y = \operatorname{arc} \sec u$	$y' = \frac{-u'}{u \sqrt{u^2 - 1}}$
$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$		
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$		
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{m \sqrt[n]{u^{m-1}}}$		

REGLA DE LA CADENA (Derivada de la función compuesta)

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCION

1. Dominio
2. Puntos de corte con los ejes
3. Simetrías
4. Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas)
5. Intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía)
6. Máximos y mínimos
7. Intervalos de concavidad y convexidad (curvatura)
8. Puntos de inflexión
9. Periodicidad (sólo en trigonométricas)
10. Regiones de la función
11. Representación

INTEGRACION. INTEGRAL DEFINIDA

CONCEPTO DE FUNCION PRIMITIVA

Sean $f(x)$ y $F(x)$ dos funciones reales definidas en un mismo dominio. La función $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ si $F(x)$ tiene por derivada a $f(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$	$\int \operatorname{tg} u \cdot u' dx = -L u + C$
$\int k u dx = k \int u dx$	$\int \operatorname{cotg} u \cdot u' dx = L \operatorname{sen} u + C$
$\int u^n \cdot u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \operatorname{cosec}^2 u \cdot u' dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 u) u' dx = \int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} dx = -\operatorname{cotg} u + C$
$\int \frac{u'}{u} dx = L u + C$	$\int \sec^2 u \cdot u' dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 u) u' dx = \int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \operatorname{tg} u + C$
$\int e^u \cdot u' dx = e^u + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arcsen} u + C = -\operatorname{arccos} u + C$
$\int a^u \cdot u' dx = \frac{a^u}{La} + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{u}{a} + C$
$\int \operatorname{sen} u \cdot u' dx = -\cos u + C$	$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \operatorname{arctg} u + C = -\operatorname{arccotg} u + C$
$\int \cos u \cdot u' dx = \operatorname{sen} u + C$	$\int \frac{u'}{a^2+u^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{u}{a} + C$

INTEGRACION POR PARTES

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

REGLA DE BARROW

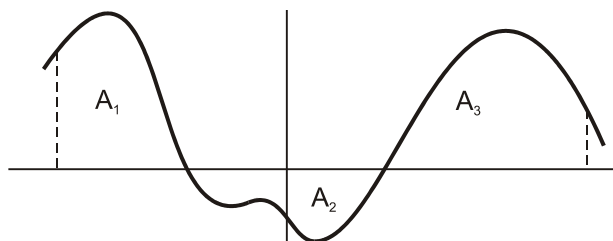
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

CALCULO DE AREAS

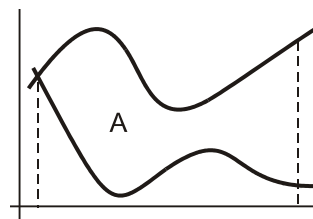
1. Area limitada por una función y el eje de abscisas

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

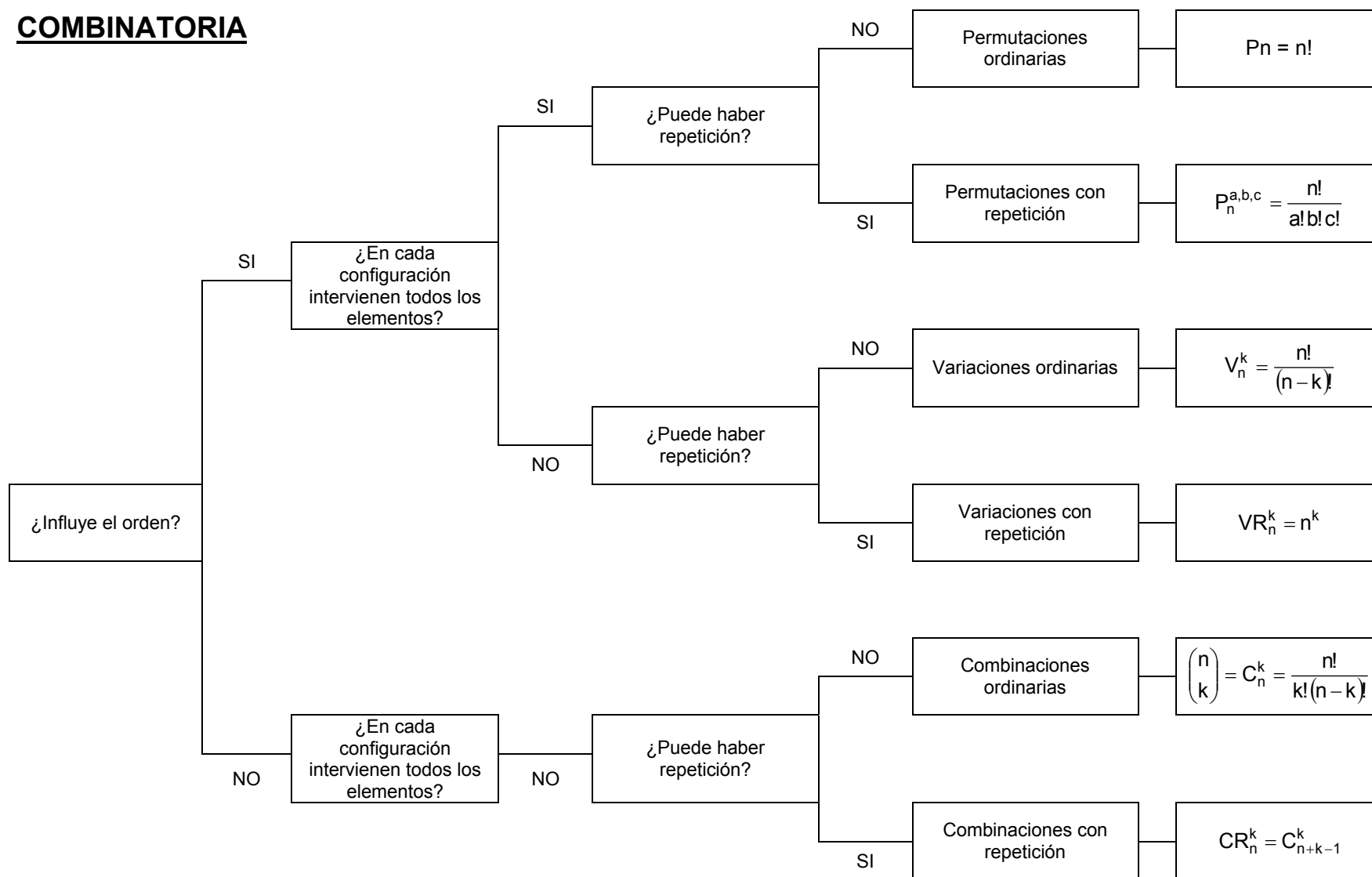


2. Area limitada por dos funciones

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \Rightarrow f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$$



COMBINATORIA



PROBABILIDAD

MODELO MATEMATICO DE LA PROBABILIDAD

DEFINICION DE LAPLACE

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables al suceso A}}{\text{nº de casos posibles}}$$

DEFINICION AXIOMATICA

La probabilidad es una función que asigna a cada suceso A de E un número real P(A), que cumple los siguientes axiomas:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(E) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$ (sucesos incompatibles)

Consecuencias:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \text{ (sucesos incompatibles)}$$

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{si } A \subset B$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad | \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

SUCESOS INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES

Dos sucesos A y B son independientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A no influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) = P(A) \text{ o } P(B/A) = P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dos sucesos A y B son dependientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) \neq P(A) \text{ o } P(B/A) \neq P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B/A)$$

TABLAS DE CONTINGENCIA

	A	$\bar{A}$	TOTAL
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
TOTAL	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS

Familia de sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ de sucesos S que cumplen:

1. Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset_n$
2. La unión de todos ellos es el suceso seguro, $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

TEOREMA DE BAYES

Sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces las probabilidades $P(A_i/B)$ vienen dadas por la expresión:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

$P(A_i)$: Probabilidades a priori

$P(A_i / B)$: Probabilidades a posteriori

$P(B/A_i)$: verosimilitudes

ESTADISTICA

Variable estadística

Conjunto de valores que toma un carácter estadístico.

Variable estadística	Cuantitativa	Discreta (nº finito)
		Continua (intervalo)
	Cualitativa	

Marca de clase

El punto medio entre los extremos de cada intervalo de una variable estadística continua es la marca de clase.

Frecuencia absoluta (f_i)

Es el número de veces que se repite una variable estadística x_i . El número total de datos N es la suma de todas las frecuencias absolutas.

$$N = \sum_{i=1}^n f_i$$

Frecuencia absoluta acumulada (F_i)

Es la suma de las frecuencias absolutas anteriores a x_i más la frecuencia absoluta de x_i

$$F_i = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i$$

Frecuencia relativa (h_i)

Cociente entre la frecuencia absoluta de x_i y el número de datos N

Frecuencia relativa acumulada (H_i)

Cociente entre frecuencia absoluta acumulada de x_i y el número total de datos N

DISTRIBUCIONES UNIDIMENSIONALES

PARAMETROS DE CENTRALIZACION

Media aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

Moda

Variable estadística con mayor frecuencia absoluta. Para variable continua hay que utilizar la siguiente ecuación:

$$M_o = L_i + c \frac{D_1}{D_1 + D_2}$$

L_i : límite inferior de la clase modal.

c : amplitud del intervalo de la variable estadística.

D_1 : diferencia entre frecuencia absoluta de la clase modal y la clase anterior.

D_2 : diferencia entre frecuencia absoluta de la clase modal y la clase posterior.

Mediana

Primera variable estadística cuya frecuencia absoluta acumulada exceda a la mitad del número de datos. Para variable continua hay que utilizar la siguiente ecuación:

$$M = L_i + c \frac{\left(\frac{N}{2}\right) - F_{i-1}}{f_i}$$

L_i : límite inferior de la clase mediana.

c : amplitud del intervalo de la variable estadística.

F_{i-1} : frecuencia absoluta acumulada de la clase anterior a la mediana.

f_i : frecuencia absoluta clase mediana.

Cuartiles

Tres valores de la variable estadística que dividen en 4 partes el n° de datos.

Deciles

Nueve valores de la variable estadística que dividen en 10 partes el n° de datos.

Percentiles

99 valores de la variable estadística que dividen en 100 partes el n° de datos.

El cálculo de éstos parámetros es análogo al de la mediana.

PARAMETROS DE DISPERSION

Rango o recorrido

Diferencia entre el mayor y el menor de los valores de la variable estadística.

Desviación de la media

Diferencia entre la variable estadística y la media.

Varianza

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{x}^2$$

Desviación típica

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{x}^2}$$

Coeficiente de variación $cv = \frac{s}{\bar{x}}$

Se utiliza para comparar dos muestras estadísticas. La muestra con un coeficiente de variación menor es la más homogénea.

Puntuaciones típicas

Tienen la misma utilidad que el coeficiente de variación.

$$\frac{x_1 - \bar{x}}{s}, \frac{x_2 - \bar{x}}{s}, \dots, \frac{x_n - \bar{x}}{s}$$

DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

Diagrama de dispersión

Representación en ejes cartesianos del par de variables estadísticas.

Covarianza

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{x} \bar{y}$$

CORRELACION Y REGRESION

Correlación

Estudio de la dependencia o relación entre dos variables de una distribución bidimensional.

Coeficiente de correlación lineal (dependencia lineal)

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \quad (-1 \leq r \leq 1) \quad \begin{cases} s_{xy} \equiv \text{covarianza} \\ s_x \equiv \text{desviación típica de } x_i \\ s_y \equiv \text{desviación típica de } y_i \end{cases}$$

$r = -1 \Rightarrow$ Dependencia lineal inversa

$-1 < r < 0 \Rightarrow$ Dependencia débil inversa

$r = 0 \Rightarrow$ Independencia

$0 < r < 1 \Rightarrow$ Dependencia débil directa

$r = 1 \Rightarrow$ Dependencia lineal directa

Regresión

Cálculo de la recta de regresión:

Gráfica Y vs. X: $y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} (x - \bar{x})$

Gráfica X vs. Y: $x - \bar{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2} (y - \bar{y})$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Función de Probabilidad

Aplicación que asocia a cada valor de la variable aleatoria, su probabilidad.

x_i	y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

Función de distribución

Asocia a cada valor de la variable la probabilidad acumulada hasta ese valor.

$$F(x) = p(x \leq x_i)$$

Media de una variable aleatoria discreta (μ)

$$\mu = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Varianza de una variable aleatoria discreta (σ^2)

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu^2$$

Desviación típica de una v. a. discreta (σ)

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu^2}$$

DISTRIBUCION BINOMIAL

Características

- 1) Sólo son posibles dos resultados: éxito y fracaso.
- 2) El resultado de cada prueba es independiente de la anterior.
- 3) Probabilidad del suceso A (éxito) es constante.

B (n, p)	n: n° de pruebas
	p: probabilidad de A (éxito)
	q: probabilidad de fracaso

Función de probabilidad de una distribución binomial

$$P_i(x_i = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \quad \text{Los cálculos de estas expresiones vienen en la TABLA I.}$$

Media, varianza y desviación típica de una distribución binomial

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = npq$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

La relación entre función de densidad $f(x)$ y función de distribución $F(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Media de una variable aleatoria continua (μ)

$$\mu = \int_a^b x f(x) dx$$

Recorrido: $[a, b]$

$f(x)$: función de densidad

Varianza y desviación típica de v. a. continua (σ^2) (σ)

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Recorrido: $[a, b]$

$f(x)$: función de densidad

DISTRIBUCION NORMAL $N(\mu, \sigma)$

Variable aleatoria cuyo recorrido es toda la recta real y tiene por función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} \quad \text{Recorrido: } (-\infty, +\infty)$$

Distribución normal estándar $N(0, 1)$

La función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2}$$

La función de distribución tiene por expresión:

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt$$

La función de distribución normal $N(0, 1)$ viene tabulada (TABLA II)

Tipificación de la variable

La transformación de la variable x , que sigue la distribución normal $N(\mu, \sigma)$, en la variable Z , que sigue la distribución estándar $N(0, 1)$, recibe el nombre de tipificación de la variable.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Características de la curva normal (campana de Gauss)

En el intervalo $(x - \mu, x + \mu)$ ——— 68,26% observaciones

En el intervalo $(x - 2\mu, x + 2\mu)$ ——— 95,4% observaciones

En el intervalo $(x - 3\mu, x + 3\mu)$ ——— 99,7% observaciones

APROXIMACION DE LA BINOMIAL A LA NORMAL

$B(n,p)$ ——— $N(np, \sqrt{npq})$

Condiciones para la aproximación: $np \geq 5$ y $nq \geq 5$

TABLA II

DISTRIBUCION NORMAL $F(x) = p(X \leq x)$										
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999