Formulario
Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales
(2º de Bachillerato)

ALGEBRA

MATRICES. DEFINICION: Se llama matriz de dimensión m x n a un conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRICES: Matriz rectangular (matriz fila, matriz columna)
Matriz cuadrada (Matriz triangular superior, Matriz triangular inferior, Matriz triangular, Matriz diagonal, Matriz escalar, Matriz identidad, Matriz nula)

RANGO DE UNA MATRIZ : Número de filas o columnas linealmente independientes. Es el orden del mayor menor complementario distinto de cero.

OPERACIONES CON MATRICES

MATRIZ TRASPUESTA (A^t)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Propiedades: 1.- $(A^t)^t=A$ 2.- $(A+B)^t=A^t+B^t$ 3.- $(kA)^t=kA^t$ 4.- $(AB)^t=B^tA^t$

Matriz simétrica: A simétrica si $A=A^t$ ($a_{ij}=a_{ji}$)
Matriz antisimétrica: A antisimétrica (o hemisimétrica) si $-A=A^t$ ($a_{ij}=-a_{ji}$)

MATRIZ OPUESTA (-A)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR (kA)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad kA = \begin{pmatrix} k\,a_{11} & ka_{12} & k\,a_{31} \\ k\,a_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathrm{M}(m,n) \qquad (kA) \in \mathrm{M(m,n)}$$

SUMA Y DIFERENCIA DE MATRICES (A±B)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathrm{M}(m,n) \qquad B \in \mathrm{M}(m,n)$$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$$

$$(A \pm B) \in \mathrm{M(m,n)}$$

PRODUCTO DE MATRICES (AxB)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathrm{M(m,n)} \qquad B \in \mathrm{M(n,p)}$$

$$AxB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$$(AxB) \in \mathrm{M(m,p)}$$

El producto de matrices no es conmutativo

DETERMINANTES

REGLA DE SARRUS (Resolución de determinantes de 2º y 3er orden).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1.- $\det(A) = \det(A^t)$
2.- $\det(F_1,F_2,\ldots,kF_i,\ldots,F_n) = k.\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n)$
3.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i+F_i',\ldots,F_n) = \det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n) + \det(F_1,F_2,\ldots,F_i',\ldots,F_n)$
4.- $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$
5.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_j,\ldots,F_n) = -\det(F_1,F_2,\ldots,F_j,\ldots,F_i,\ldots,F_n)$
6.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_i,\ldots,F_n) = 0$
7.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,kF_i,\ldots,F_n) = 0$
8.- $\det(F_1,F_2,\ldots,0,\ldots,F_n) = 0$
9.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_j,\ldots,\alpha F_i+\beta F_j,\ldots,F_n) = 0$
10.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n) = \det(F_1,F_2,\ldots,aF_1+bF_2+F_i,\ldots,F_n)$

Menor complementario (α_{ij}) : El menor complementario del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A, de orden n, es el determinante de la matriz cuadrada de orden *n-1* que se obtiene al suprimir la fila *i* y la columna *j*.

Adjunto (A_{ij}) : $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\alpha_{ij}$

MATRIZ ADJUNTA (A^d)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^d = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

MATRIZ INVERSA (A^{-1})

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$A^{-1} = \frac{\left(A^d\right)^t}{|A|}$$

La condición necesaria y suficiente para que A sea inversible (matriz regular) es que:

- A sea cuadrada
- Rg(A) =Orden(A) $\Rightarrow |A| \neq 0$

Matriz singular es una matriz no inversible.

Propiedades: 1.- $(A^{-1})^{-1}=A$ 2.- $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$ 3.- $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$ 4.- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MATRICES ASOCIADAS A UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\left.\begin{array}{r} A\,x + B\,y + C\,z = D \\ A'\,x + B'\,y + C'z = D' \\ A''x + B''y + C''z = D'' \end{array}\right\} ; \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^{*} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

M : Matriz de los coeficientes M* : Matriz ampliada

EXPRESION MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\left.\begin{array}{r} A\,x + B\,y + C\,z = D \\ A'\,x + B'\,y + C'z = D' \\ A''x + B''y + C''z = D'' \end{array}\right\} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} D \\ D' \\ D'' \end{pmatrix}}_{B}$$

B: Matriz de los términos independientes

TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Un sistema de ecuaciones lineales es <u>compatible</u> (tiene solución) $\Leftrightarrow$ Rg(M)=Rg(M*)

Rg M = Rg M* = nº incógnitas: SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única).
Rg M = Rg M* < nº incógnitas: SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).
Rg M ≠ Rg M*: SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución).

SISTEMAS HOMOGENEOS

$$\left.\begin{array}{r} A\,x + B\,y + C\,z = 0 \\ A'x + B'y + C'z = 0 \\ A''x + B''y + C''z = 0 \end{array}\right\} \qquad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

Rg M = nº incógnitas: SOLUCION TRIVIAL (x = y = z = 0).
Rg M < nº incógnitas: SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

METODOS DE RESOLUCIÓN

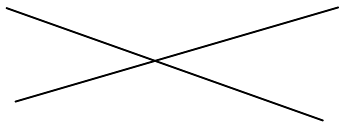
Método de Gauss: triangulación de la matriz ampliada.
Método matricial o de la matriz inversa.
Regla de Cramer.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

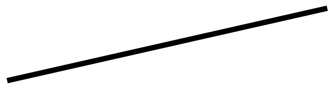
A) Sistemas con dos incógnitas (dos rectas en el plano):

$$\left.\begin{array}{r} A\,x + B\,y = C \\ A'x + B'y = C' \end{array}\right\} ; \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix} \qquad M^{*} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

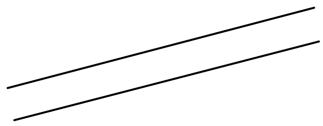
1) Rg M = Rg M* = 2 (secantes en un punto)



2) Rg M = Rg M* = 1 (coincidentes)



3) Rg M = 1 ; Rg M* = 2 (paralelas)

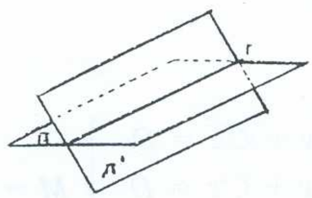


B) Sistemas con tres incógnitas (planos en el espacio):

Dos planos

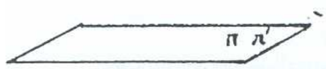
$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z = D \\ \pi' \equiv A'\,x + B'\,y + C'z = D' \end{array}\right\} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad M^{*} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

1) Rg M = Rg M* = 2
Sistema compatible indeterminado.



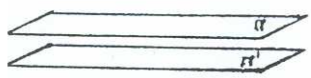
Se cortan en una recta.

2) Rg M = Rg M* = 1
Sistema compatible indeterminado.



Planos coincidentes.

3) Rg M = 1 ; Rg M* = 2
Sistema incompatible.



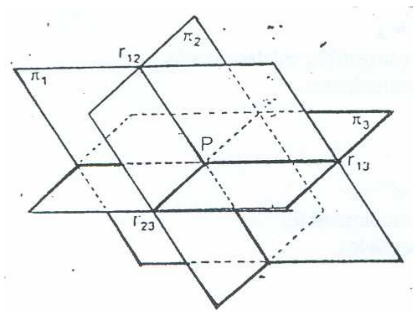
Planos paralelos.

<u>Tres planos</u>

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z = D \\ \pi' \equiv A'\,x + B'\,y + C'z = D' \\ \pi'' \equiv A''x + B''y + C''z = D'' \end{array}\right\} M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

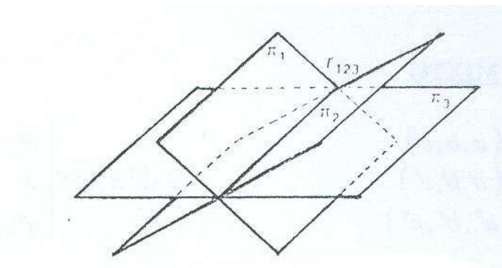
1) Rg M = Rg M^* = 3
Sistema compatible determinado.

Se cortan en un punto.



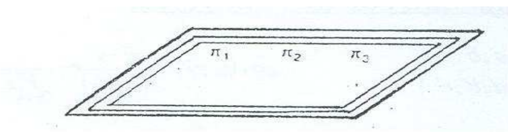
2) Rg M = Rg M^* = 2
Sistema compatible indeterminado.

Se cortan en una recta.



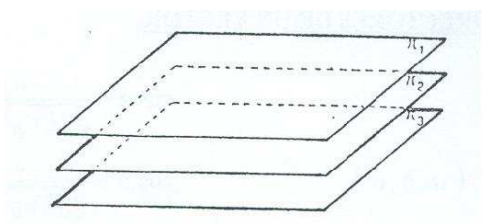
3) Rg M = Rg M^* = 1
Sistema compatible indeterminado.

Planos coincidentes.

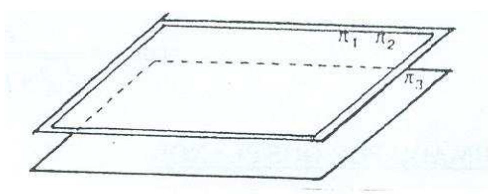


4) Rg M = 1 ; Rg M^* = 2
Sistema incompatible.

a) Planos paralelos.y distintos

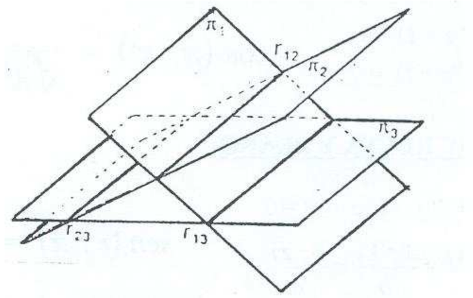


b) Dos planos coincidentes y otro paralelo

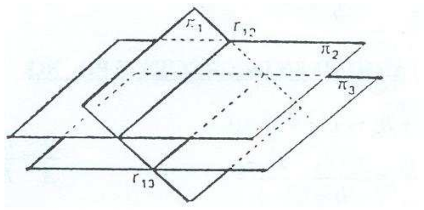


5) Rg M = 2 ; Rg M* = 3
Sistema incompatible.

a) Se cortan formando un prisma triangular.



b) Dos planos paralelos y el otro incidente con los anteriores.



PROGRAMACIÓN LINEAL

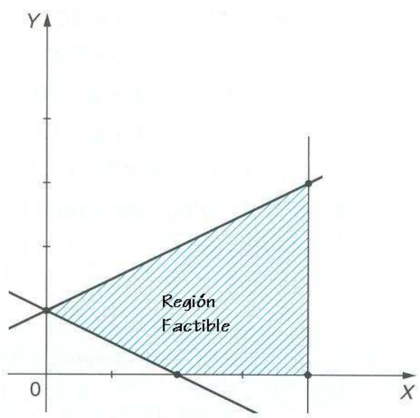
Programación lineal: Técnica matemática que trata de maximizar o minimizar un objetivo sujeto a unas restricciones.

Función objetivo: Función a maximizar o minimizar. Se van a tratar funciones de dos variables.

$$f(x,y) = ax + by + c$$

Restricciones: Cada una de las condiciones que debe cumplir la solución.

$$\left.\begin{array}{c} a_1 x + b_1 y \geq c_1 \\ a_2 x + b_2 y \leq c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x + b_n y \leq c_n \end{array}\right\}$$



Región factible: Soluciones posibles del problema. Viene limitada por las restricciones. Puede ser acotada o no.

La intersección de las restricciones definen los puntos extremos.

La solución óptima se encuentra en un punto extremo.

ANALISIS

LÍMITES Y CONTINUIDAD

INDETERMINACIONES. RESOLUCION.

$$\left(\frac{k}{0}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad (0\cdot\infty) \quad (\infty-\infty) \quad \left(1^{\infty}\right) \quad \left(\infty^{0}\right) \quad \left(0^{0}\right)$$

$\left(\frac{k}{0}\right)$: Cálculo de límites laterales.

$\left(\frac{0}{0}\right)$: En funciones racionales, descomponer en producto de factores el numerador y el denominador, y simplificar.

$(\infty\text{-}\infty)$ $\left(\frac{0}{0}\right)$: En funciones irracionales, multiplicar y dividir la función por la expresión radical conjugada.

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$: Dividir numerador y denominador por la potencia máxima del denominador.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

f(x) es continua en $x=x_0$ si:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\quad \exists \quad f(x_0) \\ 2)\quad \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \\ 3)\quad f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \end{array}}$$

DERIVACION. PROPIEDADES LOCALES DE FUNCIONES Y OPTIMIZACIÓN

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DERIVADA

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

El valor de la función derivada en un punto de la función f(x) es la pendiente de la recta tangente a esa función en dicho punto

$$\boxed{m = f'(x_0)}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto (x_0 , $f(x_0)$) es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\ (x - x_0)$$

DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

f(x) es derivable en x=x_0 si:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad\Rightarrow\quad f'(x_0^-)=f'(x_0^+)$$

Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.

REGLA DE LA CADENA (Derivada de la función compuesta)

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

TABLA DE DERIVADAS

TABLA DE DERIVADAS			
$u=f(x)$		$v=g(x)$	
$y=k$	$y'=0$	$y=\sqrt[m]{u^n}$	$y'=\dfrac{n\cdot u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$
$y=x^m$	$y'=mx^{m-1}$	$y=sen\ u$	$y'=u'\cdot\cos u$
$y=kx^m$	$y'=kmx^{m-1}$	$y=\cos u$	$y'=-u'\cdot sen\ u$
$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$	$y=tg\ u$	$y'=u'\cdot\sec^2 u$
$y=u^m$	$y'=mu^{m-1}\cdot u'$	$y=\cot g\ u$	$y'=-u'\cdot\cos ec^2\ u$
$y=ku^m$	$y'=kmu^{m-1}\cdot u'$	$y=\sec u$	$y'=u'\cdot\sec u\cdot tg\ u$
$y=u\cdot v$	$y'=u'v+v'u$	$y=\cos ec\ u$	$y'=-u'\cdot\cos ec\ u\cdot\cot g\ u$
$y=\dfrac{u}{v}$	$y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	$y=arc\,sen\ u$	$y'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\log_a u$	$y'=\dfrac{u'}{u\cdot\ln a}$	$y=arc\cos u$	$y'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\ln u$	$y'=\dfrac{u'}{u}$	$y=arc\,tg\ u$	$y'=\dfrac{u'}{1+u^2}$
$y=a^u$	$y'=a^u\ln a\cdot u'$	$y=arc\cot g\ u$	$y'=\dfrac{-u'}{1+u^2}$
$y=e^u$	$y'=e^u\cdot u'$		
$y=\sqrt{u}$	$y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y=arc\sec u$	$y'=\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$y=\sqrt[m]{u}$	$y'=\dfrac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$y=arc\cos ec\ u$	$y'=\dfrac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCIÓN

1) Dominio
2) Puntos de corte con los ejes
3) Simetrías
4) Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas
5) Intervalos de crecimiento y decrecimiento (MONOTONÍA)
6) Máximos y mínimos
7) Intervalos de concavidad y convexidad (CURVATURA)
8) Puntos de inflexión
9) Periodicidad (sólo en trigonométricas)
10) Regiones de la función.
11) Representación

INTEGRACIÓN. INTEGRAL DEFINIDA

CONCEPTO DE FUNCIÓN PRIMITIVA

Sean f(x) y F(x) dos funciones reales definidas en un mismo dominio. La función F(x) es una función primitiva de f(x), si F(x) tiene por derivada a f(x).

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$$

$$\int ku\,dx = k\int u\,dx$$

$$\int u' \cdot u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = L|u| + C$$

$$\int u' \cdot e^u\,dx = e^u + C$$

$$\int u' \cdot a^u\,dx = \frac{a^u}{La} + C$$

$$\int u' \cdot \cos u\,dx = sen u + C$$

$$\int u' \cdot sen u\,dx = -\cos u + C$$

$$\int u' \cdot tg u\,dx = -L|\cos u| + C$$

$$\int u' \cdot \operatorname{cotg} u\,dx = L|sen u| + C$$

$$\int u' \cdot \sec^2 u\,dx = \int u' \cdot (1 + tg^2 u)\,dx = \int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = tg u + C$$

$$\int u' \cdot \operatorname{cosec}^2 u\,dx = \int u' \cdot (1 + \operatorname{cotg}^2 u)\,dx = \int \frac{u'}{sen^2 u}\,dx = -\operatorname{cotg} u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = arcsen u + C = -\arccos u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\,dx = arcsen \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} u + C = -\operatorname{arc\,cotg} u + C$$

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,cotg}\frac{u}{a} + C$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

REGLA DE BARROW

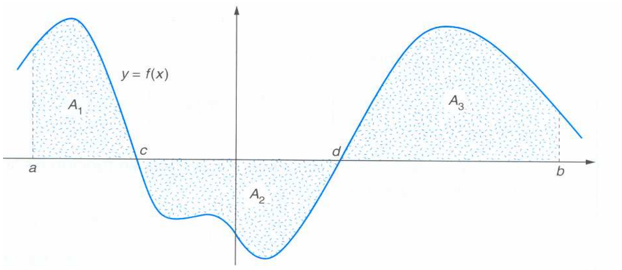
Si f(x) es una función continua en el intervalo [a,b] y F(x) es una función primitiva de f(x), entonces:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

CALCULO DE AREAS

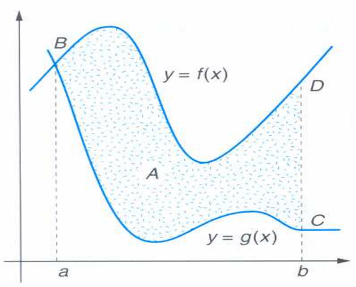
A) Área limitada por una función y el eje de abscisas:

$$A = \int_a^b |f(x)|\ dx = \int_a^c f(x)\ dx - \int_c^d f(x)\ dx + \int_d^b f(x)\ dx$$



B) Área limitada por dos funciones:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx \quad ; \quad f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$$



ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

MODELO MATEMÁTICO DE LA PROBABILIDAD

DEFINICIÖN DE LAPLACE

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables al suceso A}}{\text{nº de casos posibles}}$$

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

La probabilidad es una función que asigna a cada suceso A de E un número real P(A), que cumple los siguientes axiomas:

1º) $0 \leq P(A) \leq 1$

2º) $P(E) = 1$

3º) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$ (sucesos incompatibles)

Consecuencias:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$ (sucesos compatibles)
$P(A) \leq P(B)$ si $A \subset B$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

SUCESOS INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES

Dos sucesos A y B son independientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A no influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{o} \quad P(B/A) = P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dos sucesos A y B son dependientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) \neq P(A) \quad \text{o} \quad P(B/A) \neq P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

TABLAS DE CONTINGENCIA

	A	$\overline{A}$	$TOTAL$
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
$TOTAL$	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS

Familia de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de sucesos de S que cumplen:

a) Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \varnothing$
b) La unión de todos ellos es el suceso seguro, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la **probabilidad del suceso B** viene dada por la expresión :

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + \ldots + P(A_N)P(B/A_N) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

TEOREMA DE BAYES

Sea $A_1, A_2,\ldots,A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces las probabilidades $P(A_i/B)$ vienen dada por la expresión:

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B/A_i)}$$

$P(A_i)$: Probabilidades a priori.
$P(A_i/B)$: Probabilidades a posteriori.
$P(B/A_i)$: verosimilitudes.

ESTADISTICA. MUESTREO Y TEST DE HIPÓTESIS

La Estadística Inferencial se ocupa de inferir o deducir las características de la población a partir de las características de la muestra.

Clases de muestreo**:**-Aleatorio simple: se numeran los individuos y se sortean los que han de ser elegidos.
-Aleatorio sistemático: se numeran y, partiendo de uno de ellos escogido al azar, se toman los siguientes mediante "saltos" numéricos iguales (coeficiente de elevación $h = n/N$)
-Aleatorio estratificado: se divide a la población en subgrupos o estratos y se toman muestas aleatoriamente simples de cada estrato que sean proporcionales ($n_1/N_1=n_2/N_2=\ldots=n_k/N_k=n/N$)

ESTIMACIÓN PUNTUAL

A) Distribución muestral de medias:

Si tenemos una población con distribución normal N (μ , σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n>30, la distribución muestral de medias sigue también una distribución normal:

$$N\left(\mu\ ,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

B) Distribución muestral de proporciones:

Para muestras de tamaño n>30, la distribución muestral de proporciones sigue una distribución normal:

$$N\left(p\ ,\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \qquad z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

C) Distribución muestral de diferencia de medias:

Si tenemos dos poblaciones con distribuciones normales N (μ_1, σ_1) y N (μ_2 , σ_2) ,y las respectivas muestras son de tamaño n_1 y n_2 mayor que 30, entonces la distribución muestral de diferencia de medias sigue también una distribución normal:

$$N\left(\mu_1-\mu_2\ ,\sqrt{\frac{\sigma_2^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \qquad z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS DE CONFIANZA

Intervalo de confianza: Intervalo que , con una cierta probabilidad (nivel de confianza), contenga al parámetro que se está estimando.

$$I.C.=\left(-z_{\alpha/2}\leq z\leq z_{\alpha/2}\right)$$

Nivel de confianza ($N_c=1-\alpha$): Probabilidad de que el intervalo de confianza contenga al verdadero valor del parámetro. A cada nivel de confianza le corresponde un $z_{\alpha/2}$ llamado valor crítico.

$$P\left(-z_{\alpha/2}\leq z\leq z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

Tabla de valores críticos:

N_c	$1-\alpha$	$\alpha/2$	$z_c=z_{\alpha/2}$	z_α
90%	0,90	0,05	1,645	1,28
95%	0,95	0,025	1,96	1,645
99%	0,99	0,005	2,58	2,33

Tabla de intervalos de confianza:

Parámetros	**Intervalos de confianza**
Media μ	$\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Proporción p	$\left(p-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{PQ}{n}}, p+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{PQ}{n}}\right)$
Diferencia de medias $\mu_1-\mu_2$	$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{x}_1-\bar{x}_2+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

TAMAÑO MUESTRAL

Estimación de una muestra: $n=\frac{z_{\alpha/2}^2\sigma^2}{E^2}$ $E:$ error

Estimación de una proporción: $n=\frac{z_{\alpha/2}^2 PQ}{E^2}$ $E:$ error

CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Procedimiento por el que partiendo de una muestra, nos permite aceptar o rechazar una hipótesis emitida sobre un parámetro desconocido de la población.

Hipótesis nula (H_0): La que se formula y se quiere contrastar.
Hipótesis alternativa (H_1): La contraria a H_0.
Región de aceptación: Está formada por el conjunto de puntos tales que los valores del estadístico de contraste nos llevan a aceptar H_0.
Región crítica: Está formada por el conjunto de puntos tales que los valores del estadístico de contraste nos llevan a rechazar H_0.
Error del tipo I: El que se comete al rechazar H_0 siendo verdadera.
Error del tipo II: El que se comete al aceptar H_0 siendo falsa.
Nivel de significación ($N_s=\alpha$): Probabilidad de cometer error del tipo I. El nivel de significación N_s y el nivel de confianza N_c están relacionados de manera que verifican $N_s+N_c=1$

<u>Etapas de las pruebas de hipótesis</u>:

1ª) Se enuncia la hipótesis H_0 y su contraria H_1.
2ª) Se elige el nivel de significación α.
3ª) Se construye la región de aceptación.
4ª) Se obtiene una muestra y el estadístico de contraste.
5ª) Se calcula el valor del estadístico para la muestra.
6ª) Si dicho valor queda en la región de aceptación, se acepta H_0. En caso contrario, se acepta H_1.

<u>Tipos de contraste</u>:

a) Bilateral: La región crítica está formada por 2 conjuntos de puntos disjuntos.
b) Unilateral: La región crítica está formada por 1 solo conjunto de puntos.

Contraste de hipótesis

H_0	H_1	Tipo	Estadístico contraste	R. Aceptación
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	Bilateral	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$(-z_{\alpha/2}\ ,\ z_{\alpha/2})$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	Unilateral		$(-\infty,\ z_\alpha)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	Unilateral		$(-z_\alpha, +\infty)$

H_0	H_1	Tipo	Estadístico contraste	R. Aceptación
$p = p_0$	$p \neq p_0$	Bilateral	$z = \dfrac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$	$(-z_{\alpha/2}\ ,\ z_{\alpha/2})$
$p \leq p_0$	$p > p_0$	Unilateral		$(-\infty,\ z_\alpha)$
$p \geq p_0$	$p < p_0$	Unilateral		$(-z_\alpha, +\infty)$