FORMULARIO Matemáticas II

Ciencias de la Naturaleza y de la Salud
Tecnología

(2º de Bachillerato)

ALGEBRA

MATRICES. DEFINICION: Se llama matriz de dimensión m x n a un conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRICES: Matriz rectangular (matriz fila, matriz columna)
Matriz cuadrada (Matriz triangular superior, Matriz triangular inferior, Matriz triangular, Matriz diagonal, Matriz escalar, Matriz identidad, Matriz nula)

RANGO DE UNA MATRIZ : Número de filas o columnas linealmente independientes. Es el orden del mayor menor complementario distinto de cero.

OPERACIONES CON MATRICES

MATRIZ TRASPUESTA (A^t)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Propiedades:
1.-) $(A^t)^t = A$
2.-) $(A+B)^t = A^t+B^t$
3.-) $(kA)^t = kA^t$
4.-) $(AB)^t = B^tA^t$
5.-) $|A^t| = |A|$

Matriz simétrica: A simétrica si $A^t = A$ ($a_{ij}=a_{ji}$)
Matriz antisimétrica: A antisimétrica (o hemisimétrica) si $A^t = -A$ ($a_{ij}=-a_{ji}$)

MATRIZ OPUESTA (-A)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad -A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR $(kA) = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{31} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

$A \in \mathrm{M}(m,n) \qquad (kA) \in \mathrm{M}(\mathrm{m},\mathrm{n})$

SUMA Y DIFERENCIA DE MATRICES $(A \pm B) = (a_{ij}) \pm (b_{ij})$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$A \in \mathrm{M}(m,n) \qquad B \in \mathrm{M}(m,n)$

$$A \pm B=\begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$$

$(A \pm B) \in \mathrm{M}(\mathrm{m},\mathrm{n})$

PRODUCTO DE MATRICES (AxB)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$A \in \mathrm{M}(\mathrm{m},\mathrm{n}) \qquad B \in \mathrm{M}(\mathrm{n},\mathrm{p})$

$$AxB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$(AxB) \in \mathrm{M}(\mathrm{m},\mathrm{p})$

El producto de matrices no es conmutativo

DETERMINANTES

REGLA DE SARRUS (Resolución de determinantes de 2º y 3er orden).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1.- $\det(A) = \det(A^t)$
2.- $\det(F_1,F_2,\ldots,kF_i,\ldots,F_n) = k.\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n)$
3.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i+F_i',\ldots,F_n) = \det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n) + \det(F_1,F_2,\ldots,F_i',\ldots,F_n)$
4.- $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$
5.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_j,\ldots,F_n) = -\det(F_1,F_2,\ldots,F_j,\ldots,F_i,\ldots,F_n)$
6.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_i,\ldots,F_n) = 0$
7.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,kF_i,\ldots,F_n) = 0$
8.- $\det(F_1,F_2,\ldots,0,\ldots,F_n) = 0$
9.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_j,\ldots,\alpha F_i+\beta F_j,\ldots,F_n) = 0$
10.- $\det(F_1,F_2,\ldots,F_i,\ldots,F_n) = \det(F_1,F_2,\ldots,aF_1+bF_2+F_i,\ldots,F_n)$
11.- $\det(kA) = k^n \det(A)$

Menor complementario (α_{ij}) : El menor complementario del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A, de orden n, es el determinante de la matriz cuadrada de orden *n-1* que se obtiene al suprimir la fila *i* y la columna *j*.
Adjunto (A_{ij}) : $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\alpha_{ij}$

MATRIZ ADJUNTA (A^d)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^d = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

MATRIZ INVERSA (A^{-1})

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$$

$$A^{-1}=\frac{\left(A^{d}\right)^{t}}{|A|}$$

La condición necesaria y suficiente para que A sea inversible (matriz regular) es que:

- A sea cuadrada
- Rg(A) =Orden(A) $\Rightarrow$ $\boxed{|A|\neq 0}$

Matriz singular es una matriz no inversible.

Propiedades:

1.-) $(A^{-1})^{-1} = A$
2.-) $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$
3.-) $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
4.-) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
5.-) $|A^{-1}| = 1/|A|$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MATRICES ASOCIADAS A UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\left.\begin{array}{l} A\ x+B\ y+C\,z=D \\ A'x+B'y+C'z=D' \\ A''x+B''y+C''z=D'' \end{array}\right\} ;\quad M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}\qquad M^{*}=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

M : Matriz de los coeficientes M* : Matriz ampliada

EXPRESION MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\left.\begin{array}{l} A\ x+B\ y+C\,z=D \\ A'x+B'y+C'z=D' \\ A''x+B''y+C''z=D'' \end{array}\right\}\qquad \underbrace{\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}}_{M}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} D \\ D' \\ D'' \end{pmatrix}}_{B}$$

B: Matriz de los términos independientes

TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible (tiene solución) $\Leftrightarrow$ Rg(M)=Rg(M*)

Casos:
Rg M = Rg M* = nº incógnitas: SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única).
Rg M = Rg M* < nº incógnitas: SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).
Rg M $\neq$ Rg M*: SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución).

SISTEMAS HOMOGENEOS

$$\left.\begin{array}{l} A\,x+B\,y+C\,z=0 \\ A'x+B'y+C'z=0 \\ A''x+B''y+C''z=0 \end{array}\right\} \qquad M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

Rg M = nº incógnitas: SOLUCION TRIVIAL (x = y = z = 0).
Rg M < nº incógnitas: SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

METODOS DE RESOLUCIÓN

Método de Gauss: triangulación de la matriz ampliada.
Método matricial o de la matriz inversa. ($M X = B \rightarrow X = M^{-1} B$).
Regla de Cramer.

ANALISIS

LÍMITES Y CONTINUIDAD

INDETERMINACIONES. RESOLUCION.

$$\left(\frac{k}{0}\right) \left(\frac{0}{0}\right) \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad (0\cdot\infty) \quad (\infty-\infty) \quad (1^{\infty}) \quad (\infty^{0}) \quad (0^{0})$$

$\left(\frac{k}{0}\right)$: Cálculo de límites laterales.

$\left(\frac{0}{0}\right)$: En funciones racionales, descomponer en producto de factores el numerador y el denominador, y simplificar.

$\left(\frac{0}{0}\right)$ $(\infty-\infty)$: En funciones irracionales, multiplicar y dividir la función por la expresión radical conjugada.

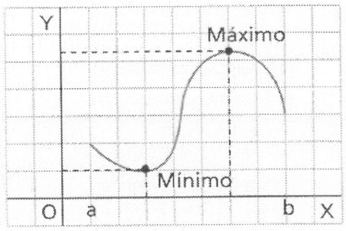
$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$: Dividir numerador y denominador por la potencia máxima del denominador.

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

f(x) es continua en $x=x_0$ si:

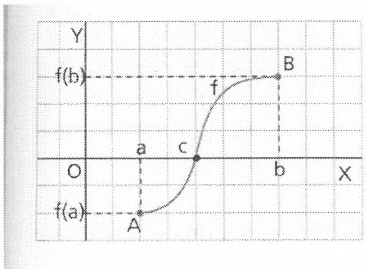
$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \exists\ f(x_0) \\ 2)\ \exists\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \\ 3)\ f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \end{array}}$$

TEOREMA DE WEIERSTRASS



Si una función es continua en un intervalo cerrado [a,b], tiene máximo y mínimo en ese intervalo.

TEOREMA DE BOLZANO



Sea una función que verifica:

1) f(x) continua en [a,b]
2) $f(a)\cdot f(b) < 0$

entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que $\boxed{f(c) = 0}$

TEOREMA DE DARBOUX

Si una función es continua en el intervalo [a,b], la función toma en ese intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.

DERIVACION. PROPIEDADES LOCALES DE FUNCIONES Y OPTIMIZACIÓN

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DERIVADA

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

El valor de la función derivada en un punto de la función f(x) es la pendiente de la recta tangente a esa función en dicho punto

$$\boxed{m = f'(x_0)}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto (x_0 , $f(x_0)$) es:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

f(x) es derivable en $x=x_0$ si:

$$\boxed{\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0^-) = f'(x_0^+)}$$

Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.
Toda función no continua en un punto es no derivable en ese punto.

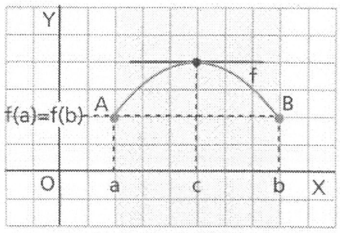
REGLA DE LA CADENA (Derivada de la función compuesta)

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

TABLA DE DERIVADAS

TABLA DE DERIVADAS			
$u = f(x)$		$v = g(x)$	
$y = k$	$y' = 0$	$y = \sqrt[m]{u^n}$	$y' = \dfrac{n \cdot u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$	$y = sen\ u$	$y' = u' \cdot \cos u$
$y = kx^m$	$y' = kmx^{m-1}$	$y = \cos u$	$y' = -u'sen\ u$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = tg\ u$	$y' = u' \cdot \sec^2 u$
$y = u^m$	$y' = mu^{m-1} \cdot u'$	$y = \cot g\ u$	$y' = -u' \cdot \cos ec^2\ u$
$y = ku^m$	$y' = kmu^{m-1} \cdot u'$	$y = \sec u$	$y' = u' \cdot \sec u \cdot tg\ u$
$y = u \cdot v$	$y' = u'v + v'u$	$y = \cos ec\ u$	$y' = -u' \cdot \cos ec\ u \cdot \cot g\ u$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	$y = arc\,sen\ u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$	$y = arc\cos u$	$y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = arc\,tg\ u$	$y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$
$y = a^u$	$y' = a^u \ln a \cdot u'$	$y = arc\cot g\ u$	$y' = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$
$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$		
$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = arc\sec u$	$y' = \dfrac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$
$y = \sqrt[m]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$y = arc\cos ec\ u$	$y' = \dfrac{-u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$

TEOREMA DE ROLLE

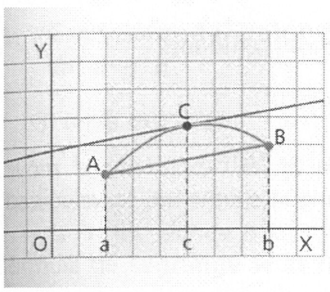


Sea una función que verifica:

1.-) f(x) es continua en [a,b]
2.-) f(x) es derivable en (a,b)
3.-) f(a) = f(b)

entonces existe al menos un c ∈ (a,b) tal que: $\boxed{f'(c) = 0}$

TEOREMA DE LAGRANGE



Sea una función que verifica:

1.-) f(x) es continua en [a,b]
2.-) f(x) es derivable en (a,b)

entonces al menos existe un c ∈ (a,b) tal que: $\boxed{f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

TEOREMA DE CAUCHY

Sean f(x) y g(x) funciones que verifican:

1.-) f(x) y g(x) continuas en [a,b]
2.-) f(x) y g(x) derivables en (a,b)
3.-) $g(a) \neq g(b)$
4.-) $f'(x) \neq 0$ y $g'(x) \neq 0$ en $x \in (a,b)$

entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que: $\boxed{\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$

REGLA DE L´HÔPITAL

Sean f(x) y g(x) funciones derivables en el entorno de x_0 sin que la derivada $g'(x)$ sea cero. Si la fracción $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ representa en el punto $x = x_0$ una expresión indeterminada de la forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ tendremos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a condición de que exista el límite de esta fracción de las derivadas. Esta regla es aplicable también en el caso en que $x_0 = \infty$. Se puede aplicar esta regla de forma sucesiva si se cumplen las condiciones indicadas.

ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCIÓN

1) Dominio
2) Puntos de corte con los ejes
3) Simetrías
4) Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas)
5) Intervalos de crecimiento y decrecimiento (MONOTONÍA)
6) Máximos y mínimos
7) Intervalos de concavidad y convexidad (CURVATURA)
8) Puntos de inflexión
9) Periodicidad (sólo en trigonométricas)
10) Regiones de la función.
11) Representación

INTEGRACIÓN. INTEGRAL DEFINIDA

CONCEPTO DE FUNCIÓN PRIMITIVA

Sean f(x) y F(x) dos funciones reales definidas en un mismo dominio. La función F(x) es una función primitiva de f(x), si F(x) tiene por derivada a f(x).

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x)}$$

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int (u \pm v)\, dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx$$

$$\int ku\, dx = k \int u\, dx$$

$$\int u' \cdot u^n\, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{u'}{u}\, dx = L|u| + C$$

$$\int u' \cdot e^u\, dx = e^u + C$$

$$\int u' \cdot a^u\, dx = \frac{a^u}{La} + C$$

$$\int u' \cdot \cos u\, dx = sen u + C$$

$$\int u' \cdot sen u\, dx = -\cos u + C$$

$$\int u' \cdot tg u\, dx = -L|\cos u| + C$$

$$\int u' \cdot \cot g\, u\, dx = L|sen u| + C$$

$$\int u' \cdot \sec^2 u\, dx = \int u' \cdot (1 + tg^2 u)\, dx = \int \frac{u'}{\cos^2 u}\, dx = tg u + C$$

$$\int u' \cdot \cos ec^2 u\, dx = \int u' \cdot (1 + \cot g^2 u)\, dx = \int \frac{u'}{sen^2 u}\, dx = -\cot g\, u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\, dx = arcsen\, u + C = -\arccos u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}}\, dx = arcsen \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} u + C = -\operatorname{arc\,cotg} u + C$$

$$\int \frac{u'}{a^2 + u^2}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arc\,cotg} \frac{u}{a} + C$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

REGLA DE BARROW

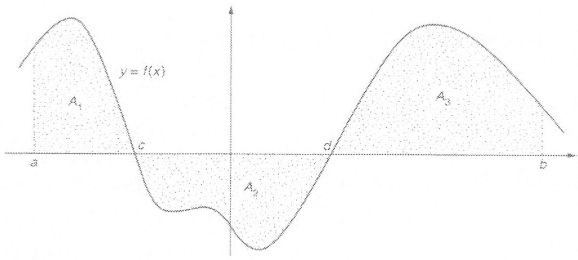
Si f(x) es una función continua en el intervalo [a,b] y F(x) es una función primitiva de f(x), entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

CÁLCULO DE ÁREAS

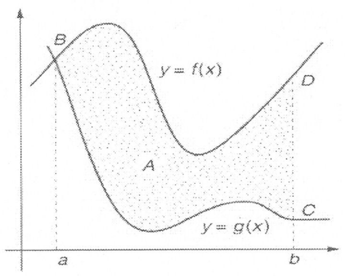
A) Área limitada por una función y el eje de abscisas:

$$A = \int_a^b |f(x)| \; dx = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx$$



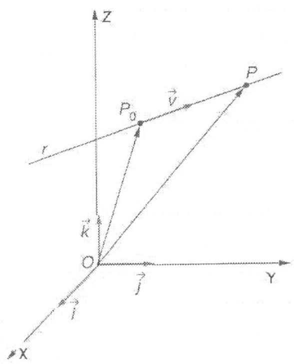
B) Área limitada por dos funciones:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx \quad ; \quad f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$$



GEOMETRIA

ECUACIONES DE LA RECTA



$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t\,(a, b, c)$$

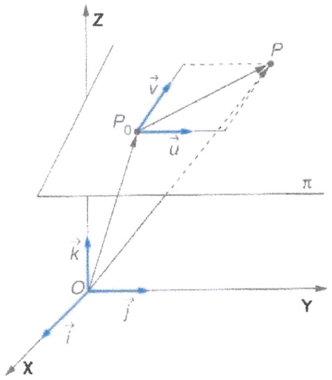
Ecuación vectorial

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + at \\ y &= y_1 + bt \\ z &= z_1 + ct \end{aligned}\right\} \text{ Ecuaciones Paramétricas}$$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad \text{Ecuación Continua}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{Ecuación de la recta que pasa por 2 puntos}$$

ECUACIONES DEL PLANO



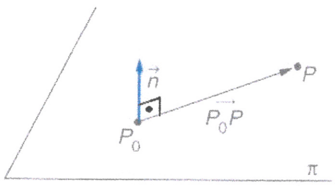
$$(x, y, z)=(x_1, y_1, z_1)+t\,(a,b,c)+s\,(a',b',c')$$

Ecuación vectorial del plano

$$\left.\begin{array}{l} x=x_1+at+a's \\ y=y_1+bt+b's \\ z=z_1+ct+c's \end{array}\right\}\ \textit{Ecuaciones Paramétricas del plano}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \Rightarrow 0 \quad Ax+By+Cz+D=0$$

Ecuación general del plano



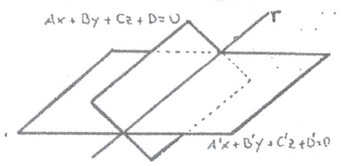
$\vec{n}=(A,B,C)$ *Vector normal o perpendicular del plano*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Ecuación normal del plano

$$\text{cosenos directores de un plano}\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\beta=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ \cos\gamma=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{cases}$$

ECUACIONES DE LA RECTA COMO INTERSECCION DE DOS PLANOS



$$r\equiv\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

$$(Ax+By+Cz+D)+t\,(A'x+B'y+C'z+D)=0$$

Ecuación del haz de planos

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

$$M=(x_M, y_M, z_M)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

BARICENTRO DE UN TRIANGULO

$$G=(x_G, y_G, z_G)=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

POSICIONES RELATIVAS

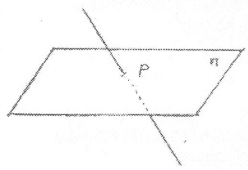
Recta y plano

$$\pi \equiv A\ x + B\ y + C\ z = D \qquad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

$$r \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z = D' \\ A''x + B''y + C''z = D'' \end{cases}$$

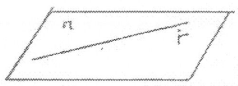
1) Rg M = Rg M* = 3

Sistema compatible determinado.
Se cortan en un punto.



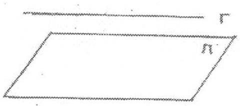
2) Rg M = Rg M* = 2

Sistema compatible indeterminado.
La recta coincidente con el plano.



3) Rg M = 2 ; Rg M* = 3

Sistema incompatible.
Recta y plano paralelos.

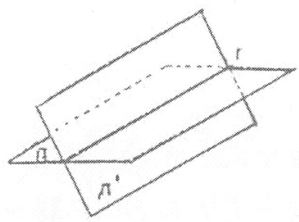


Dos planos

$$\left.\begin{aligned} \pi &\equiv A\ x + B\ y + C\ z = D \\ \pi' &\equiv A'x + B'y + C'z = D' \end{aligned}\right\} \qquad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

1) Rg M = Rg M* = 2
Sistema compatible indeterminado.

Se cortan en una recta.

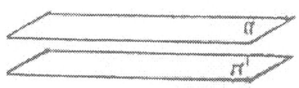


2) Rg M = Rg M* = 1
Sistema compatible indeterminado.

Planos coincidentes.

3) Rg M = 1 ; Rg M* = 2
Sistema incompatible.

Planos paralelos.



Dos rectas

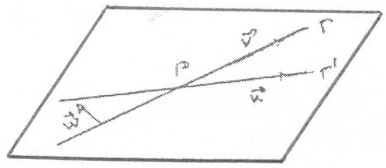
$$r \equiv \begin{cases} A\ x + B\ y + C\ z = D \\ A'\ x + B'\ y + C'\ z = D' \end{cases}$$

$$r' \equiv \begin{cases} A''\ x + B''\ y + C'' z = D'' \\ A''' x + B''' y + C''' z = D''' \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

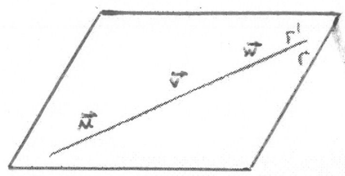
1) Rg M = Rg M* = 3
Sistema compatible determinado.

Se cortan en un punto.



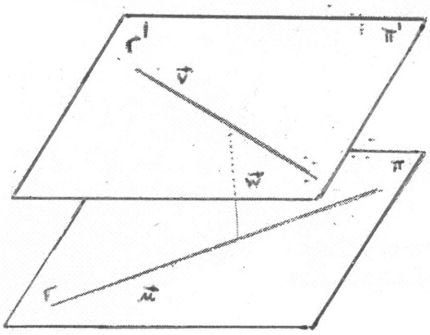
2) Rg M = Rg M* = 2
Sistema compatible indeterminado.

Rectas coincidentes.



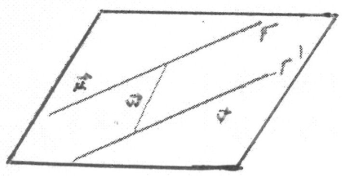
3) Rg M = 3 ; Rg M* = 4
Sistema incompatible.

Las rectas se cruzan.



4) Rg M = 2 ; Rg M* = 3
Sistema incompatible.

Rectas paralelas.



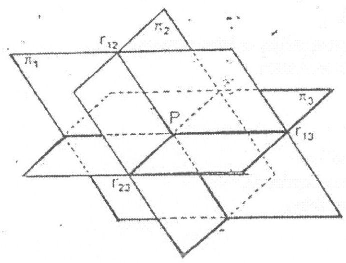
Tres planos

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv A\ x + B\ y + C\ z = D \\ \pi' \equiv A'\ x + B'\ y + C' z = D' \\ \pi'' \equiv A'' x + B'' y + C'' z = D'' \end{array}\right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

1) Rg M = Rg M* = 3
Sistema compatible determinado.

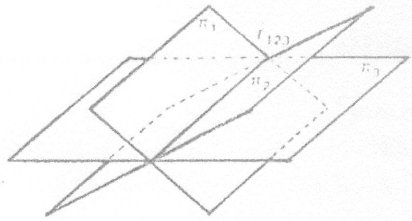
Se cortan en un punto.



2) Rg M = Rg M* = 2

Sistema compatible indeterminado.

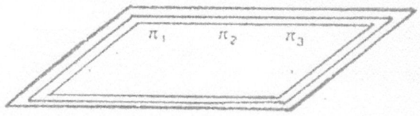
Se cortan en una recta.



3) Rg M = Rg M* = 1

Sistema compatible indeterminado.

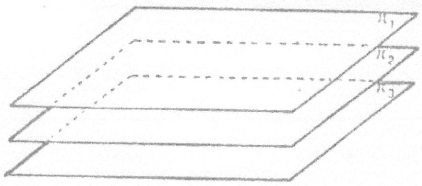
Planos coincidentes.



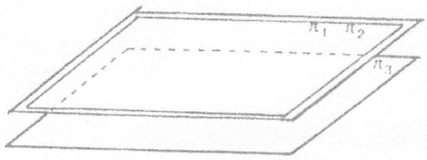
4) Rg M = 1 ; Rg M* = 2

Sistema incompatible.

a) Planos paralelos y distintos.



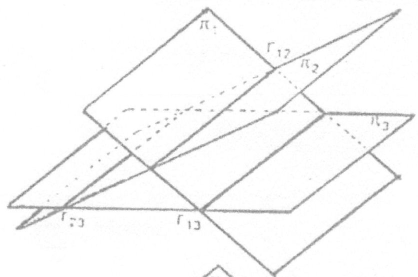
b) Dos planos coincidentes y otro paralelo.



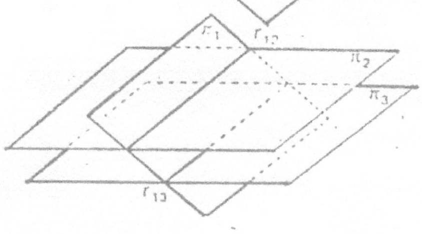
5) Rg M = 2 ; Rg M* = 3

Sistema incompatible.

a) Se cortan formando un prisma triangular.



b) Dos planos paralelos y el otro incidente con los anteriores.



<u>PRODUCTO ESCALAR</u>

$\vec{u}=(a,b,c)$ $\qquad$ $\vec{u}.\vec{v}=(a,b,c).(a',b',c')=a.a'+b.b'+c.c'$

$\vec{v}=(a',b',c')$ $\qquad$ *Si* $\vec{u}.\vec{v}=0$ $\quad$ $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *son perpendiculares*

<u>PRODUCTO VECTORIAL</u>

$\vec{u}=(a,b,c)$

$\vec{v}=(a',b',c')$

$$\vec{u}\ x\ \vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

$\vec{u} x \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

PRODUCTO MIXTO

$$\vec{u}=(a,b,c) \quad \vec{v}=(a',b',c') \quad \vec{w}=(a'',b'',c'')$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v} \, x \, \vec{w})=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

ANGULO FORMADO POR DOS VECTORES

$$\vec{u}=(a,b,c) \quad \vec{v}=(a',b',c')$$

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{a'a+b'b+c'c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

$$\vec{u}=(a,b,c)$$

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ANGULO FORMADO POR DOS PLANOS

$$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$$
$$\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$$

$$\cos(\pi,\pi')=\frac{A'A+B'B+C'C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

ANGULO ENTRE RECTA Y PLANO

$$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$$
$$r \equiv \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

$$sen(r,\pi)=\frac{|aA+bB+cC|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO

$$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$$
$$r \equiv \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C} \qquad \pi \perp r$$

PARALELISMO ENTRE RECTA Y PLANO

$$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$$
$$r \equiv \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

$$aA+bB+cC=0$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

$$P(x_1, y_1, z_1) \qquad Q(x_2, y_2, z_2) \qquad d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

$$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \qquad P=(x_0, y_0, z_0) \qquad d(P,\pi)=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

Distancia del origen a un plano $\quad d(O,\pi)=\left|\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

$$P=(x_0, y_0, z_0)$$

$$r \equiv \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} \Rightarrow \begin{array}{l} A=(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{u}_r=(a,b,c) \end{array} \qquad d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u}_r\right|}{|\vec{u}_r|}$$

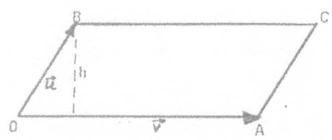
DISTANCIA ENTRE RECTAS QUE SE CRUZAN

$$r \equiv \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} \Rightarrow \begin{array}{l} A=(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{u}_r=(a,b,c) \end{array}$$

$$r \equiv \frac{x-x_2}{a'}=\frac{y-y_2}{b'}=\frac{z-z_2}{c'} \Rightarrow \begin{array}{l} A=(x_2, y_2, z_2) \\ \vec{w}_r=(a',b',c') \end{array}$$

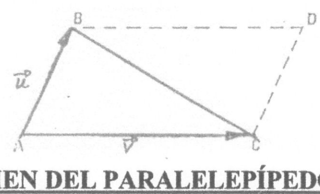
$$d(r,s)=\frac{\left|\det\left[\vec{u}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right]\right|}{|\vec{u}_r \times v_s|}$$

ÁREA DEL PARALELOGRAMO



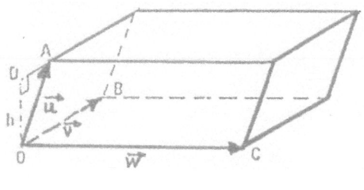
$$S=|\vec{u}\,x\,\vec{v}|=\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}\right|$$

ÁREA DEL TRIÁNGULO



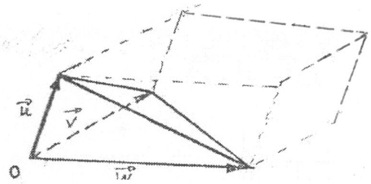
$$S=\frac{1}{2}|\vec{u}\,x\,\vec{v}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}\right|$$

VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO



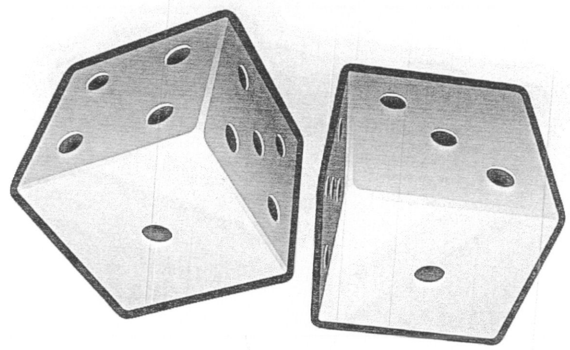
$$V=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\,x\,\vec{w})| = \left|\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}\right|$$

VOLUMEN DEL TETRAEDRO



$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\,x\,\vec{w})\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}\right\|$$

PROBABILIDAD



MODELO MATEMÁTICO DE LA PROBABILIDAD

DEFINICIÖN DE LAPLACE

$$P(A) = \frac{\text{n}^\text{o}\text{ de casos favorables al suceso A}}{\text{n}^\text{o}\text{ de casos posibles}}$$

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

La probabilidad es una función que asigna a cada suceso A de E un número real P(A), que cumple los siguientes axiomas:

1º) $0 \leq P(A) \leq 1$

2º) $P(E) = 1$

3º) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$ (sucesos incompatibles)

Consecuencias:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si $A \cap B \neq \varnothing$ (sucesos compatibles)

$P(A) \leq P(B)$ si $A \subset B$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

SUCESOS INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES

Dos sucesos A y B son independientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A no influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{o} \quad P(B/A) = P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dos sucesos A y B son dependientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) \neq P(A) \quad \text{o} \quad P(B/A) \neq P(B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

TABLAS DE CONTINGENCIA

	A	$\overline{A}$	$TOTAL$
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
$TOTAL$	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS

Familia de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de sucesos de S que cumplen:

a) Son incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \varnothing$

b) La unión de todos ellos es el suceso seguro, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces la **probabilidad del suceso B** viene dada por la expresión :

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + \ldots + P(A_N)P(B/A_N) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

TEOREMA DE BAYES

Sea A_1, A_2,…,A_n un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$, entonces las probabilidades $P(A_i/B)$ vienen dada por la expresión:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$

$P(A_i)$: Probabilidades a priori.
$P(A_i/B)$: Probabilidades a posteriori.
$P(B/A_i)$: verosimilitudes.