



ACADEMIA TAMARGO

# FORMULARIO MATEMÁTICAS

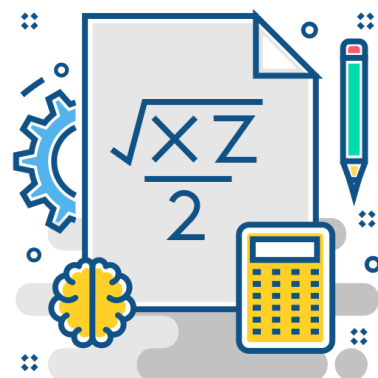
*2º BACHILLERATO*



CIENCIAS DE LA NATURALEZA  
Y DE LA SALUD.



TECNOLOGÍA.





## FORMULARIO MATEMÁTICAS II

### 2º de Bachillerato

### Ciencias de la Naturaleza y de la Salud Tecnología

#### ALGEBRA

**MATRICES. DEFINICION:** Se llama matriz de dimensión  $m \times n$  a un conjunto de números reales dispuestos en  $m$  filas y  $n$  columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**TIPOS DE MATRICES:** Matriz rectangular (matriz fila, matriz columna)  
Matriz cuadrada (matriz triangular superior, matriz triangular inferior)  
Matriz triangular, (Matriz diagonal, Matriz escalar, Matriz identidad, Matriz nula)

**RANGO DE UNA MATRIZ:** Número de filas o columnas linealmente independientes. Es el orden del mayor menor complementario distinto de cero.

#### OPERACIONES CON MATRICES

MATRIZ TRASPUESTA ( $A^t$ )

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Propiedades:
- 1.-)  $(A^t)^t = A$
  - 2.-)  $(A+B)^t = A^t + B^t$
  - 3.-)  $(kA^t)^t = kA$
  - 4.-)  $(AB)^t = B^t A^t$
  - 5.-)  $|A^t| = |A|$

Matriz simétrica: A simétrica si  $A^t = A$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ )

Matriz antisimétrica (o hemisimétrica) si  $A^t = -A$  ( $a_{ij} = -a_{ji}$ )



### MATRIZ OPUESTA (-A)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

### PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR $(Ka) = K(A_{ij}) = (ka_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

$A \in M(m, n)$   $(kA) \in M(m, n)$

### SUMA Y DIFERENCIA DE MATRICES $(A \pm B) = (a_{ij} \pm b_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$A \in M(m, n)$   $B \in M(m, n)$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$$

$(A \pm B) \in M(m, n)$

### PRODUCTO DE MATRICES $(A \times B)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$A \in M(m, n)$   $B \in M(n, p)$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$(A \times B) \in M(m, p)$

**El producto de matrices no es conmutativo**



## DETERMINANTES

**REGLA DE SARRUS** (Resolución de determinantes de 2º y 3º orden)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

- 1.-  $\det(A) = \det(A^t)$
- 2.-  $\det(F_1, F_2, \dots, kF_i, \dots, F_n) = k \cdot \det(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n)$
- 3.-  $\det(F_1, F_2, \dots, F_i + F_i', \dots, F_n) = \det(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n) + \det(F_1, F_2, \dots, F_i', \dots, F_n)$
- 4.-  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- 5.-  $\det(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_j, \dots, F_i, \dots, F_n) = -\det(F_1, F_2, \dots, F_j, \dots, F_i, \dots, F_n)$
- 6.-  $\det(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_i, \dots, F_n) = 0$
- 7.-  $\det(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, kF_i, \dots, F_n) = 0$
- 8.-  $\det(F_1, F_2, \dots, 0, \dots, F_n) = 0$
- 9.-  $\det(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_j, \dots, \alpha F_i + \beta F_j, \dots, F_n) = 0$
- 10.-  $\det(F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n) = \det(F_1, F_2, \dots, aF_1 + bF_2 + F_i, \dots, F_n)$
- 11.-  $\det(kA) = k^n \det(A)$

**Menor complementario** ( $\alpha_{ij}$ ): El menor complementario del elemento  $a_{ij}$  de una matriz cuadrada  $a$ , de orden  $n$ , es el determinante de la matriz cuadrada de orden  $n-1$  que se obtiene al suprimir la fila  $i$  y la columna  $j$ .

**Adjunto** ( $A_{ij}$ ):  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$

### MATRIZ ADJUNTA ( $A^d$ )

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A^d = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$



## MATRIZ INVERSA ( $A^{-1}$ )

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|}$$

La condición necesaria y suficiente para que A sea invertible (matriz regular) es que:

- A sea cuadrada
- $\text{Rg}(A) = \text{Orden}(A) \Rightarrow |A| \neq 0$

Matriz singular es una matriz no invertible

Propiedades:

- 1.-)  $(A^{-1})^{-1} = A$
- 2.-)  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- 3.-)  $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
- 4.-)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 5.-)  $|A^{-1}| = 1/|A|$

## SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

### MATRICES ASOCIADAS A UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \\ A''x + B''y + C''z = D'' \end{array} \right\}; \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

M : Matriz de los coeficientes    M\* : Matriz ampliada

### EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \\ A''x + B''y + C''z = D'' \end{array} \right\} \quad \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ D' \\ D'' \end{pmatrix}$$

$M \qquad X = B$

B: Matriz de los términos independientes

### TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible (tiene solución)  $\Leftrightarrow \text{Rg}(M) = \text{Rg}(M^*)$

Casos:

$\text{Rg } M = \text{Rg } M^* = n^{\circ} \text{ incógnitas}$ : SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única).

$\text{Rg } M = \text{Rg } M^* < n^{\circ} \text{ incógnitas}$ : SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones).

$\text{Rg } M \neq \text{Rg } M^*$ : SISTEMA INCOMPATIBLE (no tiene solución).



## SISTEMAS HOMOGÉNEOS

$$\begin{cases} A x + B y + C z = 0 \\ A' x + B' y + C' z = 0 \\ A'' x + B'' y + C'' z = 0 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

Rg M = nº incógnitas: SOLUCIÓN TRIVIAL ( $x = y = z = 0$ ).

Rg M < nº incógnitas: SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

## MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Método de Gauss: triangulación de la matriz ampliada.

Método matricial o de la matriz inversa. ( $MX = B \rightarrow X = M^{-1} B$ ).

Regla de Cramer.

## ANÁLISIS

### LÍMITES Y CONTINUIDAD

#### INDETERMINACIONES. RESOLUCIÓN

$$\left(\frac{k}{0}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad (0 \cdot \infty) \quad (\infty - \infty) \quad (1^\infty) \quad (\infty^0) \quad (0^0)$$

$\left(\frac{k}{0}\right)$ : Cálculo de límites laterales.

$\left(\frac{0}{0}\right)$ : En funciones racionales, descomponer en producto de factores el numerador y el denominador, y simplificar

$\left(\frac{0}{0}\right) (\infty - \infty)$ : En funciones irracionales, multiplicar y dividir la función por la expresión radical conjugada.

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ : Dividir numerador y denominador por la potencia máxima del denominador.

#### CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

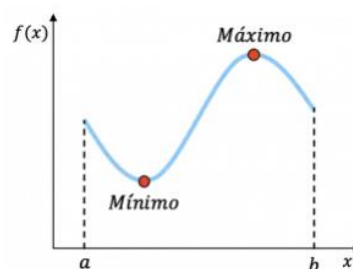
$f(x)$  es continua en  $x=x_0$  si:

- 1)  $\exists f(x_0)$
- 2)  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$
- 3)  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$



### TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si una función es continua en un intervalo cerrado  $[a,b]$ , tiene máximo y mínimo en ese intervalo.

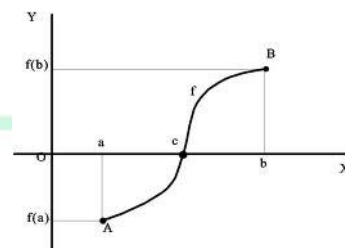


### TEOREMA DE BOLZANO

Sea una función que verifica:

- 1)  $f(x)$  continua en  $[a,b]$
- 2)  $f(a) \cdot f(b) < 0$

entonces existe un  $c \in (a,b)$  tal que  $f(c)=0$



### TEOREMA DE DARBOUX

Si una función es continua en el intervalo  $[a,b]$ , la función toma en ese intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.

## DERIVACIÓN. PROPIEDADES LOCALES DE FUNCIONES Y OPTIMIZACIÓN

### DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN DERIVADA

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

### INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

El valor de la función derivada en un punto de la función  $f(x)$  es la pendiente de la recta tangente a esa función en dicho punto

$$m = f'(x_0)$$

La ecuación de la recta tangente en el punto  $(x_0, f(x_0))$  es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) (x - x_0)$$

### DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

$f(x)$  es derivable en  $x=x_0$  si:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$$

Toda función derivable en un punto es continua en ese punto.  
Toda función no continua en un punto es no derivable en ese punto.





### REGLA DE LA CADENA (Derivada de la función compuesta)

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

### TABLA DE DERIVADAS

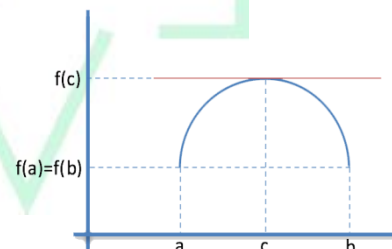
| TABLA DE DERIVADAS |                                      |                                 |                                                        |
|--------------------|--------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $u = f(x)$         |                                      | $v = g(x)$                      |                                                        |
| $y = k$            | $y' = 0$                             | $y = \sqrt[n]{u^m}$             | $y' = \frac{n \cdot u'}{m \sqrt[n]{u^{m-n}}}$          |
| $y = x^n$          | $y' = nx^{n-1}$                      | $y = \operatorname{sen} u$      | $y' = u' \cdot \cos u$                                 |
| $y = kx^n$         | $y' = knx^{n-1}$                     | $y = \cos u$                    | $y' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$                  |
| $y = u \pm v$      | $y' = u' \pm v'$                     | $y = \operatorname{tg} u$       | $y' = u' \cdot \sec^2 u$                               |
| $y = u^n$          | $y' = nu^{n-1} \cdot u'$             | $y = \operatorname{colog} u$    | $y' = -u' \cdot \operatorname{cosec}^2 u$              |
| $y = ku^n$         | $y' = knu^{n-1} \cdot u'$            | $y = \sec u$                    | $y' = u' \cdot \sec u \cdot \operatorname{tg} u$       |
| $y = u \cdot v$    | $y' = u'v + v'u$                     | $y = \operatorname{cosec} u$    | $y' = -u' \cdot \operatorname{cosec} u \cdot \cot g u$ |
| $y = \frac{u}{v}$  | $y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$         | $y = \operatorname{arcsen} u$   | $y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$                         |
| $y = \log_a u$     | $y' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$      | $y = \operatorname{arccos} u$   | $y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$                        |
| $y = \ln u$        | $y' = \frac{u'}{u}$                  | $y = \operatorname{arctg} u$    | $y' = \frac{u'}{1+u^2}$                                |
| $y = a^u$          | $y' = a^u \ln a \cdot u'$            | $y = \operatorname{arccolog} u$ | $y' = \frac{-u'}{1+u^2}$                               |
| $y = e^u$          | $y' = e^u \cdot u'$                  | $y = \operatorname{arcsec} u$   | $y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$                        |
| $y = \sqrt{u}$     | $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$          | $y = \operatorname{arccosec} u$ | $y' = \frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$                       |
| $y = \sqrt[n]{u}$  | $y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ |                                 |                                                        |

### TEOREMA DE ROLLE

Sea una función que verifica:

- 1.-)  $f(x)$  es continua en  $[a,b]$
- 2.-)  $f(x)$  es derivable en  $(a,b)$
- 3.-)  $f(a) = f(b)$

entonces existe al menos en  $c \in (a,b)$  tal que  $f'(c) = 0$

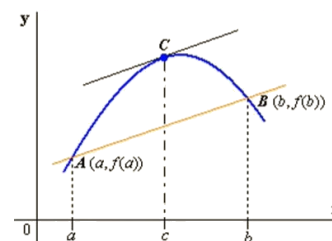


### TEOREMA DE LAGRANGE

Sea una función que verifica:

- 1.-)  $f(x)$  es continua en  $[a,b]$
- 2.-)  $f(x)$  es derivable en  $(a,b)$

entonces existe al menos en  $c \in (a,b)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$







### TEOREMA DE CAUCHY

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones que verifican:

- 1.-)  $f(x)$  y  $g(x)$  continuas en  $[a,b]$
- 2.-)  $f(x)$  y  $g(x)$  derivables en  $(a,b)$
- 3.-)  $g(a) \neq g(b)$
- 4.-)  $f'(x) \neq 0$  y  $g'(x) \neq 0$  en  $x \in (a,b)$

entonces existe al menos en  $c \in (a,b)$  tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

### REGLA DE L'HÔPITAL

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones derivables en el entorno de  $x_0$  sin que la derivada  $g'(x)$  sea cero.

Si la fracción  $\frac{f(x)}{g(x)}$  representa en el punto  $x=x_0$  una expresión indeterminada de la forma  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$  tendremos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a condición de que exista el límite de esta función de las derivadas. Esta regla es aplicable también en el caso en que  $x_0 = \infty$ . Se puede aplicar esta regla de forma sucesiva si se cumplen las condiciones indicadas.

### ESTUDIO LOCAL DE UNA FUNCIÓN

- 1) Dominio
- 2) Puntos de corte con los ejes
- 3) Simetrías
- 4) Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas)
- 5) Intervalos de crecimiento y decrecimiento (MONOTONÍA)
- 6) Máximos y mínimos
- 7) Intervalos de concavidad y convexidad (CURVATURA)
- 8) Puntos de inflexión
- 9) Periodicidad (sólo en trigonométricas)
- 10) Regiones de la función
- 11) Representación

## INTEGRACIÓN. INTEGRAL DEFINIDA

### CONCEPTO DE FUNCIÓN PRIMITIVA

Sean  $f(x)$  y  $F(x)$  dos funciones reales definidas en un mismo dominio. La función  $F(x)$  es una función primitiva de  $f(x)$ , si  $F(x)$  tiene por derivada a  $f(x)$ .

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x)$$



### TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$$

$$\int ku dx = k \int u dx$$

$$\int u' \cdot u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = L|u| + C$$

$$\int u' \cdot e^u dx = e^u + C$$

$$\int u' \cdot a^u dx = \frac{a^u}{La} + C$$

$$\int u' \cdot \cos u dx = \text{senu} + C$$

$$\int u' \cdot \text{senu} dx = -\cos u + C$$

$$\int u' \cdot \text{tgu} dx = -L|\cos u| + C$$

$$\int u' \cdot \cot g u dx = L|\text{senu}| + C$$

$$\int u' \cdot \sec^2 u dx = \int u' \cdot (1 + \text{tg}^2 u) dx = \int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \text{tgu} + C$$

$$\int u' \cdot \cos ec^2 u dx = \int u' \cdot (1 + \cot g^2 u) dx = \int \frac{u'}{\text{sen}^2 u} dx = -\cot g u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsen u + C = -\arccos u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}} dx = \arcsen \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctg u + C = -\text{arc cotg} u + C$$

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \text{arc cotg} \frac{u}{a} + C$$

### INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

### REGLA DE BARROW

Si  $f(x)$  es una función continua en el intervalo  $[a,b]$  y  $F(x)$  es una función primitiva de  $f(x)$ , entonces:

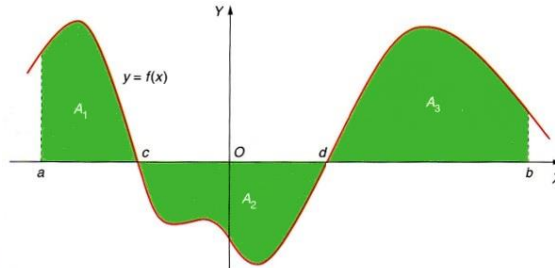
$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



## CÁLCULO DE ÁREAS

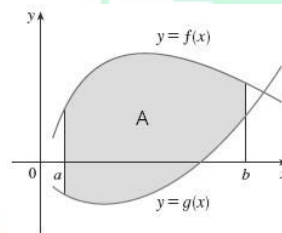
A) Área limitada por una función y el eje de abscisas:

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$



B) Área limitada por dos funciones:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx ; f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$



## GEOMETRÍA

### ECUACIONES DE LA RECTA

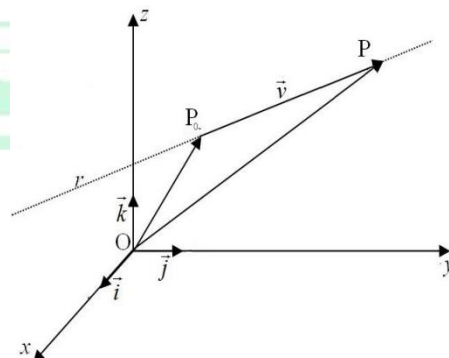
$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

Ecuación vectorial

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + at \\ y &= y_1 + bt \\ z &= z_1 + ct \end{aligned} \right\} \text{Ecuaciones Paramétricas}$$

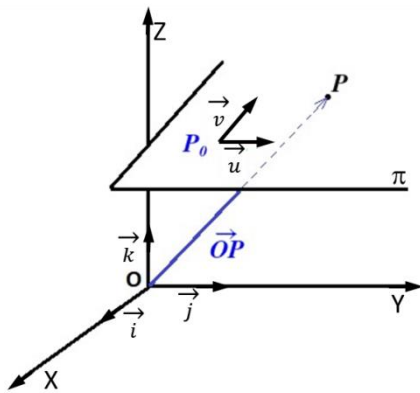
$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \text{ Ecuación de la recta que pasa por 2 puntos}$$





## ECUACIONES DEL PLANO



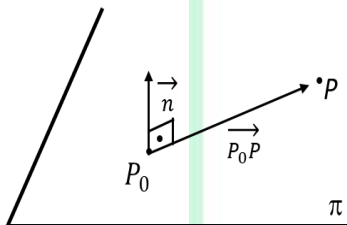
$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) + s(a', b', c')$$

Ecuación vectorial del plano

$$\begin{cases} x = x_1 + at + a's \\ y = y_1 + bt + b's \\ z = z_1 + ct + c's \end{cases} \text{ Ecuaciones Paramétricas del plano}$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \Rightarrow 0 \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

Ecuación general del plano



$\vec{n} = (A, B, C)$  Vector normal o perpendicular del plano

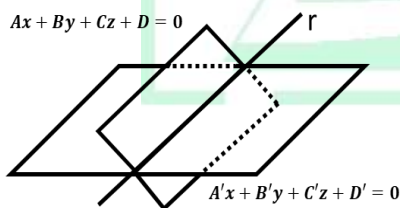
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Ecuación normal del plano

cosenos directores de un plano

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{cases}$$

## ECUACIONES DE LA RECTA COMO INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS



$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

$$(Ax + By + Cz + D) + t(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

Ecuación del haz de planos

## PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

$$M = (x_M, y_M, z_M) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

## BARICENTRO DE UN TRIANGULO

$$G = (x_G, y_G, z_G) = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)$$



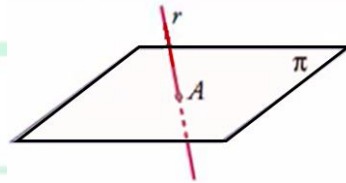
## POSICIONES RELATIVAS

### Recta y plano

$$\begin{aligned} \pi &\equiv A x + B y + C z = D \\ r &\equiv \begin{cases} A' x + B' y + C' z = D \\ A'' x + B'' y + C'' z = D \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

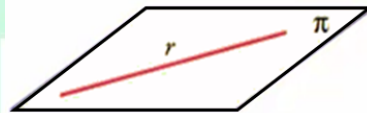
#### 1) $\text{Rg } M = \text{Rg } M^* = 3$

Sistema compatible determinado.  
Se cortan en un punto.



#### 2) $\text{Rg } M = \text{Rg } M^* = 2$

Sistema compatible indeterminado.  
La recta coincide con el plano.



#### 3) $\text{Rg } M = 2 ; \text{Rg } M^* = 3$

Sistema incompatible.  
Recta y planos paralelos.

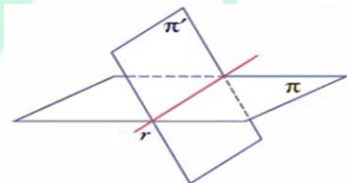


### Dos planos

$$\begin{aligned} \pi &\equiv A x + B y + C z = D \\ r &\equiv A' x + B' y + C' z = D \end{aligned} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

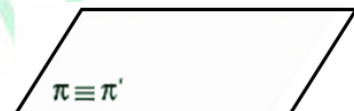
#### 1) $\text{Rg } M = \text{Rg } M^* = 2$

Sistema compatible indeterminado.  
Se cortan en una recta.



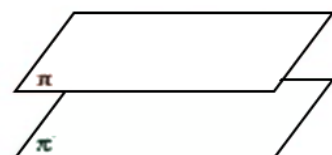
#### 2) $\text{Rg } M = \text{Rg } M^* = 1$

Sistema compatible indeterminado.  
Planos coincidentes.



#### 3) $\text{Rg } M = 1 ; \text{Rg } M^* = 2$

Sistema incompatible.  
Planos paralelos.





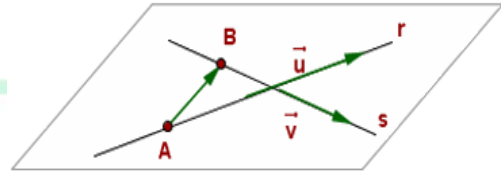
## Dos rectas

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} A''x + B''y + C''z = D'' \\ A'''x + B'''y + C'''z = D''' \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

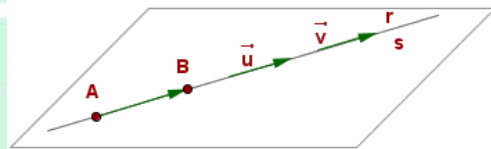
### 1) $\text{Rg } M = \text{Rg } M^* = 3$

Sistema compatible determinado.  
Se cortan en UN PUNTO.



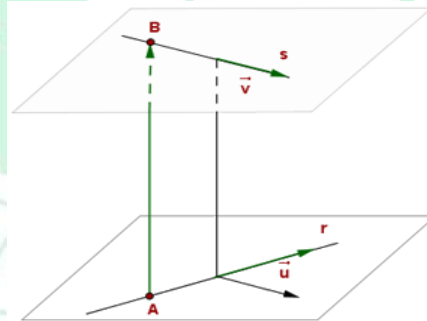
### 2) $\text{Rg } M = \text{Rg } M^* = 2$

Sistema compatible indeterminado.  
Rectas coincidentes.



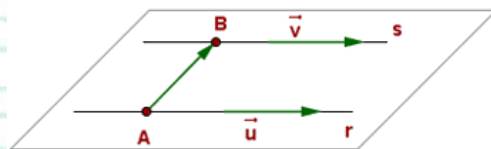
### 3) $\text{Rg } M = 3 ; \text{Rg } M^* = 4$

Sistema incompatible.  
Las rectas se cruzan.



### 4) $\text{Rg } M = 2 ; \text{Rg } M^* = 3$

Sistema incompatible.  
Rectas paralelas.

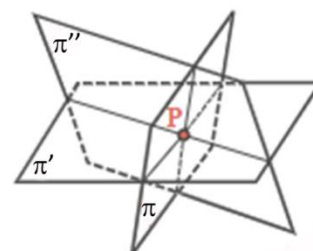


## Tres planos

$$\left. \begin{aligned} \pi &\equiv Ax + By + Cz = D \\ \pi' &\equiv A'x + B'y + C'z = D' \\ \pi'' &\equiv A''x + B''y + C''z = D'' \end{aligned} \right\} \quad M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

### 1) $\text{Rg } M = \text{Rg } M^* = 3$

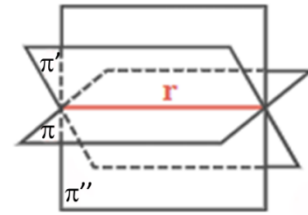
Sistema compatible determinado.  
Se cortan en UN PUNTO.





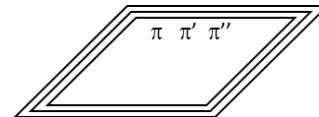
**2)  $Rg M = Rg M^* = 2$**

Sistema compatible indeterminado.  
Se cortan en una recta.



**3)  $Rg M = 3 ; Rg M^* = 1$**

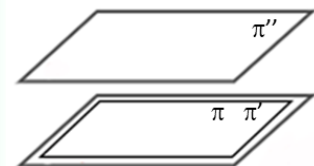
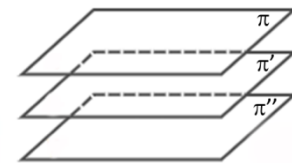
Sistema compatible indeterminado.  
Planos coincidentes



**4)  $Rg M = 1 ; Rg M^* = 2$**

Sistema compatible indeterminado.

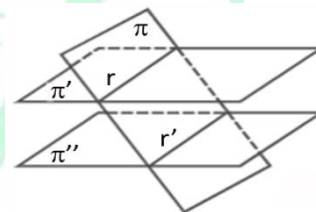
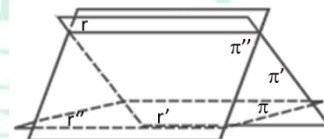
- a) Planos paralelos y distintos.
- b) Dos planos coincidentes y otro paralelo



**5)  $Rg M = 2 ; Rg M^* = 3$**

Sistema incompatible.

- a) Se cortan formando un prisma triangular.
- b) Dos planos paralelos y el otro incide con los anteriores



**PRODUCTO ESCALAR**

$$\vec{u} = (a, b, c,)$$

$$\vec{v} = (a', b', c')$$

$$\vec{u}, \vec{v} = (a, b, c). (a', b', c') = a.a' + b.b' + c.c$$

Si  $\vec{u}, \vec{v} = 0$   $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son perpendiculares

**PRODUCTO VECTORIAL**

$$\vec{u} = (a, b, c,)$$

$$\vec{v} = (a', b', c')$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

$\vec{u} \times \vec{v}$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$





### PRODUCTO MIXTO

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (a, b, c,) \\ \vec{v} &= (a', b', c',) \\ \vec{w} &= (a'', b'', c'')\end{aligned}\quad \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

### ÁNGULO FORMADO POR DOS VECTORES

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (a, b, c,) \\ \vec{v} &= (a', b', c',)\end{aligned}\quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{a'a + b'b + c'c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

### COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

$$\vec{u} = (a, b, c) \quad \begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \cos \beta &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\end{aligned}$$

### ÁNGULO FORMADO POR DOS PLANOS

$$\begin{aligned}\pi &\equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' &\equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0\end{aligned}\quad \cos(\pi, \pi') = \frac{A'A + B'B + C'C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

### ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

$$\begin{aligned}\pi &\equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ r &\equiv \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}\end{aligned}\quad \sin(r, \pi) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

### PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO

$$\begin{aligned}\pi &\equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ r &\equiv \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}\end{aligned}\quad \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \quad \pi \perp r$$

### PARALELISMO ENTRE RECTA Y PLANO

$$\begin{aligned}\pi &\equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ r &\equiv \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}\end{aligned}\quad aA + bB + cC = 0$$



### DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

$$\begin{matrix} P(x_1, y_1, z_1) \\ Q(x_2, y_2, z_2) \end{matrix} \quad d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

### DISTANCIA DE UN PUNTO UN PLANO

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

$$d(P, \pi) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Distancia del origen a un plano

$$d(O, \pi) = \left| \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

### DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

$$P(x_0, y_0, z_0)$$

$$r \equiv \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \Rightarrow \begin{matrix} A = (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{u}_r = (a, b, c) \end{matrix}$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$$

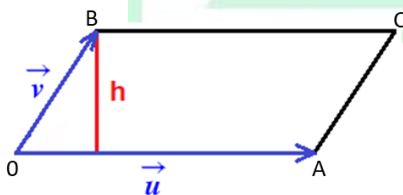
### DISTANCIA ENTRE RECTAS QUE SE CRUZAN

$$r \equiv \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \Rightarrow \begin{matrix} A = (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{u}_r = (a, b, c) \end{matrix}$$

$$s \equiv \frac{x - x_2}{a} = \frac{y - y_2}{b} = \frac{z - z_2}{c} \Rightarrow \begin{matrix} A = (x_2, y_2, z_2) \\ \vec{w}_s = (a', b', c') \end{matrix}$$

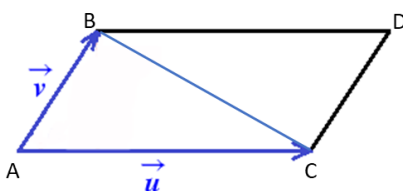
$$d(r, s) = \frac{|\det[\vec{u}_r, \vec{w}_s, \vec{AB}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{w}_s|}$$

### ÁREA DEL PARALELOGRAMO



$$S = |\vec{u} \times \vec{v}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

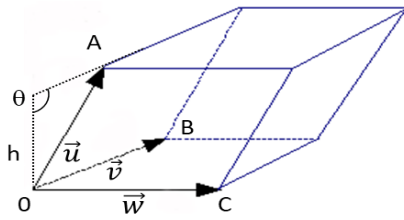
### ÁREA DEL TRIÁNGULO



$$S = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

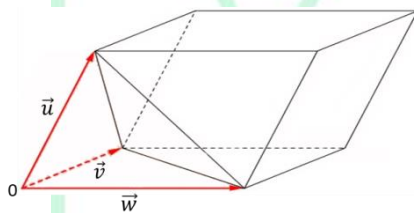


### VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO



$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

### VOLUMEN DEL TETRAEDRO



$$V = \frac{1}{6} |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

### PROBABILIDAD



### MODELO MATEMÁTICO DE LA PROBABILIDAD

#### DEFINICIÓN DE LAPLACE

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables al suceso } A}{\text{nº de casos posibles}}$$

#### DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

La probabilidad es una función que asigna a cada suceso A de E en número real P(A), que cumple los siguientes axiomas:

- 1)  $0 \leq P(A) \leq 1$
- 2)  $P(E)=1$
- 3)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

si  $A \cap B = \emptyset$  (sucesos incompatibles)



consecuencias

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{si } A \cap B \neq \emptyset \text{ (sucesos compatibles)}$$

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{si } A \subset B$$

### PROBABILIDAD CONDICIONADA

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad ; P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

### SUCESOS INDEPENDIENTES Y DEPENDIENTES

Dos sucesos A y B son independientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A no influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) = P(A) \text{ o } P(B/A) = P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dos sucesos A y B son dependientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A influye en el segundo suceso B:

$$P(A/B) \neq P(A) \text{ o } P(B/A) \neq P(B) \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B/A)$$

### TABLAS DE CONTINGENCIA

|           | A                   | $\bar{A}$                 | TOTAL        |
|-----------|---------------------|---------------------------|--------------|
| B         | $P(A \cap B)$       | $P(\bar{A} \cap B)$       | $P(B)$       |
| $\bar{B}$ | $P(A \cap \bar{B})$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(\bar{B})$ |
| TOTAL     | $P(A)$              | $P(\bar{A})$              | 1            |

### SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS

Familia de sucesos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de sucesos de S que cumplen:

- Son incompatibles dos a dos,  $A_i \cap A_j = \emptyset$
- La unión de todos ellos es el suceso seguro,  $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$

### TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sea  $A_1, A_2, \dots, A_n$  un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales  $P(B/A_i)$ , entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$



### TEOREMA DE BAYES

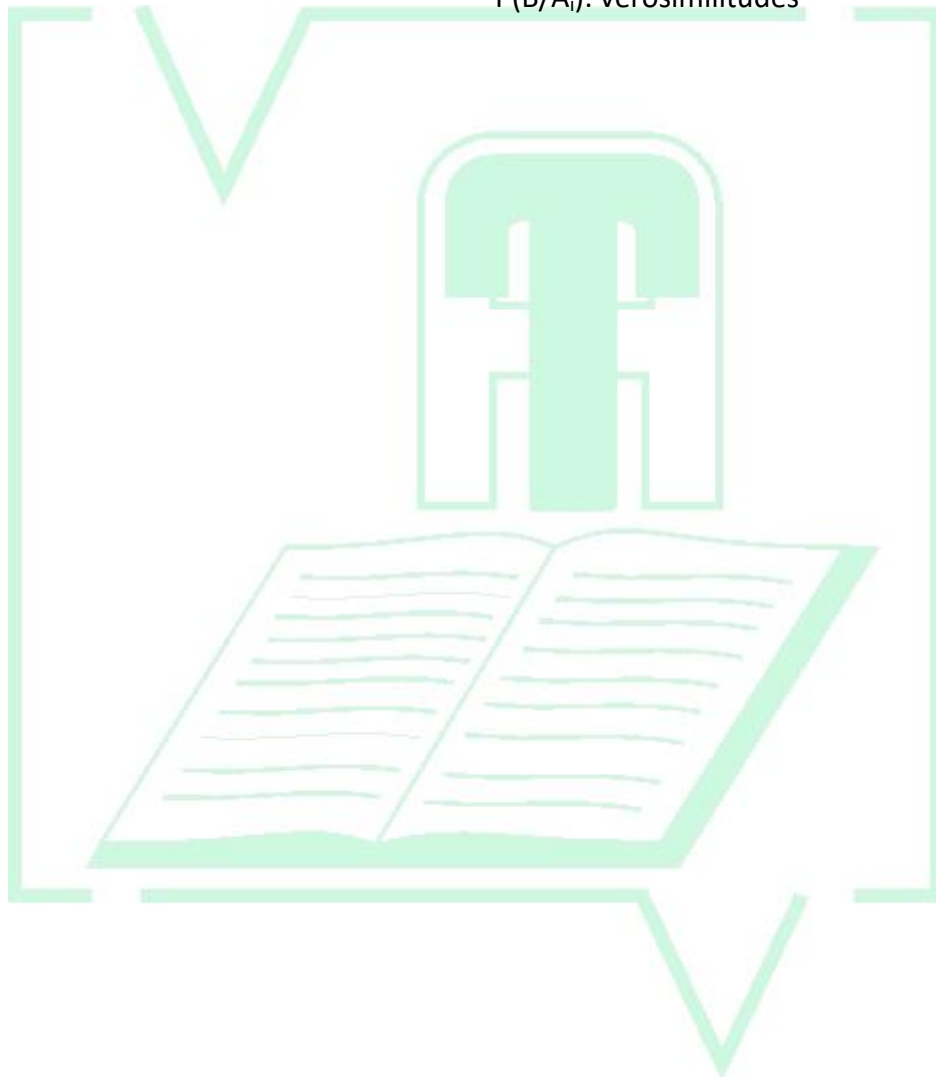
Sea  $A_1, A_2, \dots, A_n$  un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea  $B$  un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales  $P(B/A_i)$  entonces las probabilidades  $P(A_i/B)$  vienen dada por la expresión:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

$P(A_i)$ : Probabilidades a priori.

$P(A_i/B)$ : Probabilidades a posteriori.

$P(B/A_i)$ : verosimilitudes





## DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

### INTRODUCCIÓN

- Experimento: "Lanzar una moneda dos veces"

$X = \text{"nº de caras"}$   
VARIABLE ALEATORIA

$X_i = \text{valores de la V.A.}$   
 $t: \text{Función de probabilidad}$   
 $P(X = x_i) = p_i$

$P_i = \text{probabilidades}$

- Distribución de probabilidad: Relación entre los valores de la variable aleatoria  $X$  y sus probabilidades, expresados en forma de
  - Par de valores:  $(x_i, p_i)$
  - Tabla:
 

|       |  |  |  |
|-------|--|--|--|
| $x_i$ |  |  |  |
| $p_i$ |  |  |  |
  - Gráfica:
  - Expresión algebraica: formula

- VARIABLE ALEATORIA
  - DISCRETA: Asociada a valores puntuales (finitos)  $\rightarrow$  Función de prob.  $\equiv$  func. MASA de prob.:  $f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$
  - CONTINUA: Asociada a cualquier valor en un intervalo (infinitos)  $\rightarrow$  Función de prob.  $\equiv$  func. DENSIDAD de prob.:  $f(x)$

### DISTRIBUCIONES DISCRETAS

- CARACTERÍSTICA: func. MASA de prob.  $f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$   
 $P(\text{salen 2 caras}) = P(X = 2) = 1/4$
- DISTRIBUCIÓN ACUMULADA DE PROBABILIDAD:  $P(X \leq a) = P(X = a) + P(X = a-1) + \dots + P(X = 0)$
- PROPIEDADES Y CÁLCULO DE LAS PROBABILIDADES:
  - $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$
  - $\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$
  - $P(a \leq x \leq b) = P(X=a) + P(X=a+1) + \dots + P(X=b)$
  - $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$
- PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

Media ( $\mu$ ) o ESPERANZA:  $E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$

$$\text{var}[X] = E[(X - \mu)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

VARIANZA:

$$\text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \mu^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot P(X = x_i) - \mu^2$$

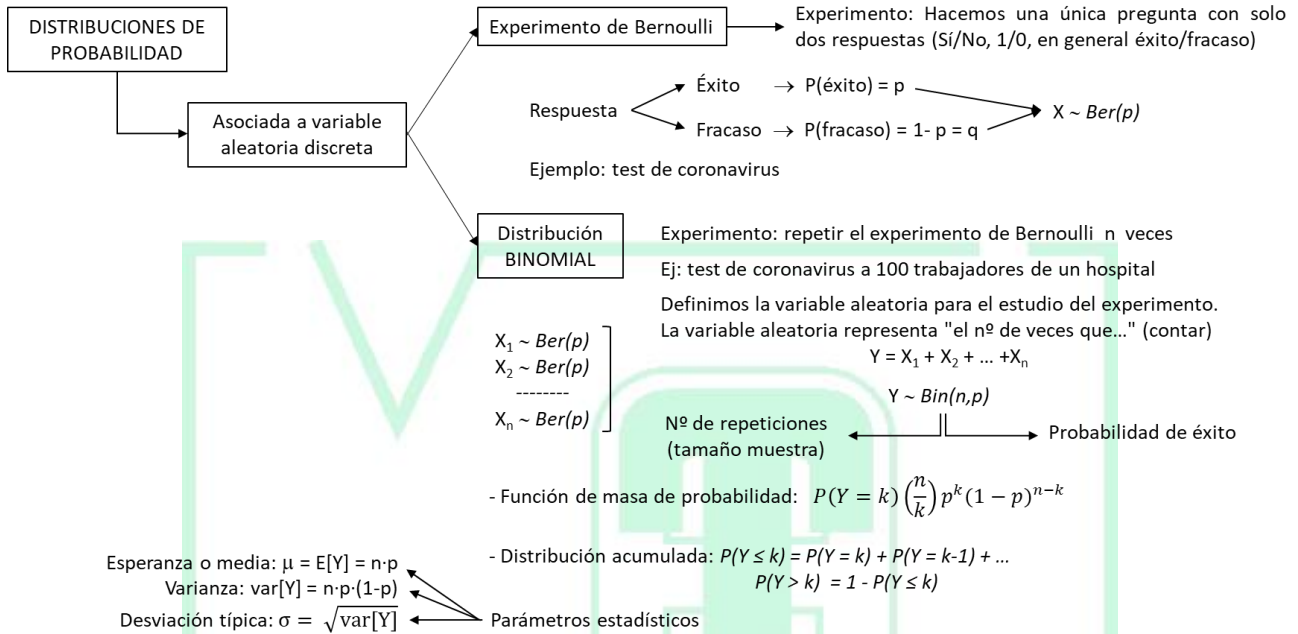
DESVIACIÓN TÍPICA:  $\sigma = \sqrt{\text{var}[X]}$

Moda:  $x_i$  de mayor probabilidad

Mediana:  $x_i$  que divide a la muestra en dos subconjuntos del mismo nº de datos

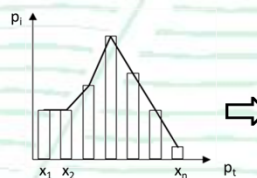


## DISTRIBUCIÓN BINOMIAL (I)

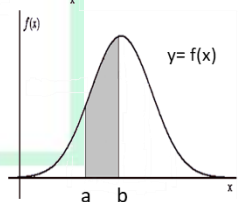


## DISTRIBUCIÓN CONTINUA

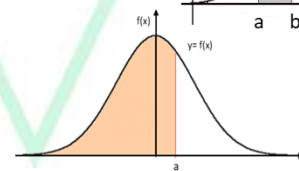
- CARACTERÍSTICA: func. DENSIDAD de prob.  $f(x)$



- PROBABILIDADES y propiedades:  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$   
 $P(-\infty \leq X \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$   
 $P(X = a) = 0$



- DISTRIBUCIÓN ACUMULADA DE PROBABILIDAD:  $P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$



- PARÁMETROS ESTADÍSTICOS:
  - Media  $\mu$  o ESPERANZA:  $\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$
  - VARIANZA:  $\text{var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \mu^2$
  - DESVIACIÓN TÍPICA:  $\sigma = \sqrt{\text{var}[X]}$
  - MODA:  $M_o = \text{Máximo de } f(x)$
  - MEDIANA:  $\int_{-\infty}^m f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m$

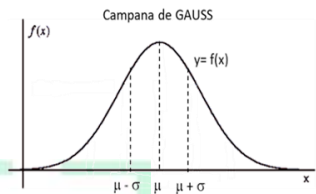




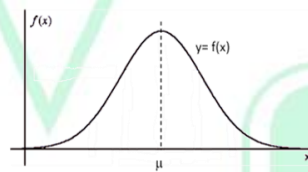
## DISTRIBUCIÓN NORMAL

Función de densidad de una dist. NORMAL:  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$   $\longrightarrow$   $X \sim N(\mu, \sigma)$

- Características:
- Curva continua,  $D(f) = (-\infty, \infty)$ .
  - Un máx. rel. y abs. ( $x = \mu$ ) y dos ptos. de inflex. ( $x = \mu \pm \sigma$ ).
  - Asíntota horizontal OX.
  - Área cerrada bajo toda la curva y el eje OX vale 1.
  - SIMÉTRICA respecto a  $x = \mu$ .

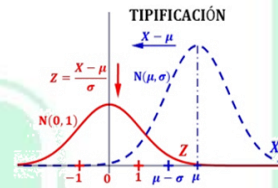


Normal ESTÁNDAR



$X \sim N(\mu, \sigma)$

Tipificación  
 $\Leftrightarrow$   
 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$



Normal estándar

Calculo de probabilidades

Dist. continua

Probabilidad: Área encerrada entre la func. De densidad y OX, dentro del intervalo de cálculo.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$P(-\infty \leq X \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$P(X = a) = 0$$

Dist. Normal ESTÁNDAR

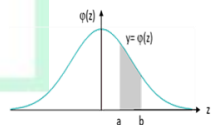
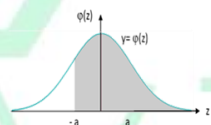
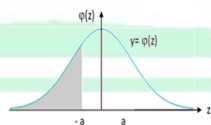
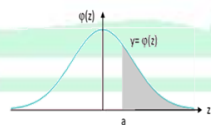
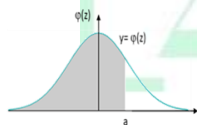
$$P(X \leq a) \sim \text{Tabla}$$

$$P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)$$

$$P(Z \leq -a) = P(Z > a)$$

$$P(Z > -a) = P(Z \leq a)$$

$$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$$



Dist. Normal  $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$



Características de la tabla:

- Tabla de una distribución estándar para  $Z \sim N(0,1)$
- $P(Z \leq a) = \Phi(a) = F(a)$
- Incluye solo valores positivos de  $Z$  (y el cero)
- $P(Z = 0) = 0,5$  Mitad del área encerrada por la curva
- Precisión de cuatro decimales (a partir de 3,00 se empiezan a repetir valores de probabilidad)

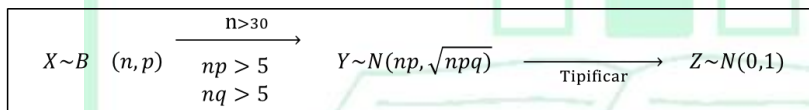
Uso de la tabla:

- $P(Z \leq 1,24) = F(1,24) = 0,8925$   
 $1,24 = 1,20 + 0,04$
- $P(Z \leq 2,115) = F(2,115) = \text{interpolarse}$   
 $2,115 = 2,10 + 0,015$
- $P(Z \leq a) = \Phi(a) = F(a) = 0,9949 \rightarrow a = 2,57$

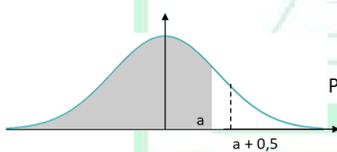
|     | 0      | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0   | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7938 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8079 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1   | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8906 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2   | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9947 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9950 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3   | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

**Aproximación de una BINOMIAL por una NORMAL**

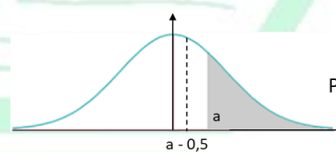
Ejemplo:  $N = 20000$   $X \sim \text{Bin}(20000; 0,4)$   $\rightarrow P(X \leq 205) = ?$   $\rightarrow P(X \leq 25) = \binom{20000}{25} 0,4^{25} (1 - 0,4)^{200-25} = ?$   
 $P = 0,4$



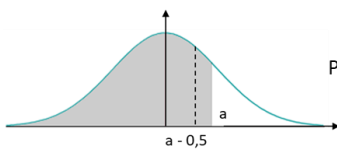
Correcciones por continuidad:  $P(X = a) \approx P(a - 0,5 \leq Y \leq a + 0,5) \rightarrow Z \sim N(0,1)$



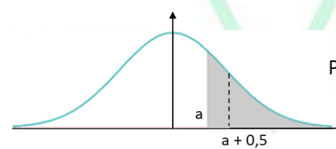
$$P(X \leq a) \approx P(Y \leq a + 0,5)$$



$$P(X \geq a) \approx P(Y \geq a - 0,5)$$



$$P(X < a) \approx P(Y < a - 0,5)$$



$$P(X > a) \approx P(Y > a + 0,5)$$